СРЕДНЕЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

А. М. Райцин

ЛАНЬ

E.LANBOOK.COM

А. М. РАЙЦИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ЛАНЬ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2024

УДК 51
ББК 22.1я723

Р 18 **Райцин А. М.** Элементарная математика : учебное пособие для СПО / А. М. Райцин. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 244 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-507-48065-4

Основной целью предлагаемой читателю книги является восстановление и закрепление знаний по школьному курсу математики, в развитии навыков решений типовых задач. Книга состоит из 16 глав и содержит описание основных методов решения задач по алгебре, тригонометрии и началам математического анализа. Хотя книга и не является классическим учебником по математике, её практическая направленность позволяет достаточно быстро вспомнить и освоить необходимый объем знаний соответствующего раздела. Для этого в начале каждого нового раздела приводятся краткие теоретические сведения по рассматриваемому материалу. В каждой главе производится разбор типовых примеров и задач.

Данное пособие выгодно отличается от многих тем, что основное внимание в нем уделяется подробному описанию методов решения задач и их систематизации. Освоение предлагаемых читателю методов позволит создать или развить базу для решений задач высшей математики, что важно для дальнейшего обучения в высшей школе.

Данная книга может быть использована в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных курсов, а также для самостоятельной подготовки к ЕГЭ.

Соответствует современным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным квалификационным требованиям.

УДК 51
ББК 22.1я723

Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

© Издательство «Лань», 2024
© А. М. Райцин, 2024
© Издательство «Лань», художественное оформление, 2024

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

НОК — наименьшее общее кратное
НОД — наибольший общий делитель
ОДЗ — область допустимых значений
N — множество натуральных чисел
Z — множество целых чисел
Q — множество рациональных чисел
R — множество действительных чисел
I — множество иррациональных чисел
$\varnothing$ — пустое множество
$\{a; b; c\}$ — множество, состоящее из элементов $a; b; c$
[a] — целая часть действительного числа a
$\in$ — обозначение принадлежности элемента множеству
$\cup$ — обозначение объединения множеств
$\cap$ — обозначение пересечения множеств
$\Leftrightarrow$ — знак равносильности
$\Rightarrow$ — знак следствия
{ — знак системы
[— знак совокупности

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателей предлагается книга — учебное пособие «Элементарная математика», предназначенное для поступающих в высшие учебные заведения.

Книга прошла апробацию на подготовительных курсах МТУСИ и на протяжении ряда лет являлась базовым пособием для подготовки к вступительным экзаменам и к ЕГЭ.

Основной целью книги является восстановление и закрепление знаний по математике в развитии навыков решений типовых задач.

Книга состоит из 16 глав и содержит описание основных методов решения задач по алгебре, тригонометрии и началам математического анализа.

Хотя книга и не является классическим учебником по математике, её практическая направленность позволяет достаточно быстро вспомнить и освоить необходимый объем знаний соответствующего раздела. Для этого в начале каждого нового раздела приводятся краткие теоретические сведения по рассматриваемому материалу. В каждой главе производится разбор типовых примеров и задач.

В настоящее время выпускается большое количество учебных пособий для абитуриентов. Данное пособие выгодно отличается от многих тем, что основное внимание в нем уделяется подробному описанию методов решения задач и их систематизации.

При написании книги автор исходил из принципа, что различных задач очень много, а количество методов значительно меньше и, если их освоить, то можно успешно решать задачи не только элементарной математики, но и создать или развить базу для решений задач высшей математики, что важно для дальнейшего обучения в высшей школе.

Данная книга может быть использована в качестве учебного пособия для слушателей подготовительных курсов, а также для самостоятельной подготовки к ЕГЭ.

ГЛАВА 1
НАТУРАЛЬНЫЕ, ЦЕЛЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ, ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1.1. Натуральные числа (N)

1.1.1. Простые и составные числа

Напомним, что множество натуральных чисел (N) — это числа вида 1, 2, 3...

Определение 1.1

Если натуральное число имеет только два различных натуральных делителя, то оно называется ***простым****.*

Составное *число — это натуральное число, не равное единице и не являющееся простым числом.*

Например, числа 17, 13 и 29 являются простыми числами, а числа 8, 6 и 49 являются числами составными. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Ряд натуральных чисел вместе с числом нуль называется *расширенным* рядом натуральных чисел и обозначается буквой Z_0. Любое натуральное число записывается в десятичной системе счисления в виде суммы:

$$\mathrm{m}=\overline{\mathrm{a}_{\mathrm{n}}\mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}\ldots\mathrm{a}_1\mathrm{a}_0}=\mathrm{a}_{\mathrm{n}}\cdot 10^{\mathrm{n}}+\mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}\cdot 10^{\mathrm{n}-1}+\ldots+\mathrm{a}_1\cdot 10+\mathrm{a}_0,$$

где n — число из расширенного натурального ряда, a_n — одно из чисел 1, 2, 3…9, а каждое из $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ — одно из чисел 0, 1, 2, 3,…9. Заметим, что $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ — цифры данного числа.

Теорема 1.1 (основная теорема арифметики)

Всякое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых сомножителей и притом единственным способом.

Заметим, что при этом произведения, отличающиеся только порядком сомножителей, различными не считаются.

Например, $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$ — разложение натурального числа 360 на простые множители.

1.1.2. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель

Определение 1.2

Наименьшим общим кратным (НОК) двух натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из заданных чисел.

Правило нахождения НОК:

а) записывают разложение каждого из данных чисел *m* и *n* на простые множители;

б) находят НОК (*m, n*) в виде произведения общих множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем степени.

Например, НОК чисел $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ и $48 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ равен $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

Определение 1.3

Наибольшим общим делителем (*НОД*) *двух натуральных чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делятся заданные числа.*

Правило нахождения НОД

а) записывают разложение каждого из данных чисел *m* и *n* на простые множители;

б) находят НОД (*m, n*) в виде произведения общих множителей, взяв каждый из них с наименьшим показателем степени.

Например, НОД чисел $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ и $48 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ равен $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 12$.

Определение 1.4

Если НОД двух чисел равен 1,то числа называются взаимно простыми.

Например, числа 15 и 8, а также 5 и 4 являются взаимно простыми числами.

Теорема 1.2

Для любых натуральных чисел m и n справедлива формула

$$\boxed{m \cdot n = \text{НОК}(m,n) \cdot \text{НОД}(m,n)}$$

Например, для чисел m = 60 и n = 48 имеем 60 · 48 = 240 · 12. Напомним, что НОК (60,48) = 240, НОД (60,48) = 12.

Теорема 1.3

Для любых натуральных чисел m и n справедлива формула

$$\boxed{m = m^* \cdot \text{НОД}(m,n),\ n = n^* \cdot \text{НОД}(m,n),}$$

где m^*, n^* *взаимно простые числа.*

Например, для чисел m = 60 и n = 48 $m^* = 5$, $n^* = 4$, так как 60 = 12 · 5, 48 = 12 · 4.

Теорема 1.4

Для любых натуральных чисел m и n справедлива формула

$$\boxed{m^* \cdot n^* = \frac{\text{НОК}(m,n)}{\text{НОД}(m,n)},}$$

где m^*, n^* *— взаимно простые числа.*

Например, для чисел $m = 60$ и $n = 48$ $m^* = 5$, $n^* = 4$ и $5 \cdot 4 = \frac{240}{12}$.

1.1.3. Признаки делимости

Разделить натуральное число m на натуральное число k — значит найти натуральное число q такое, что $m = k \cdot q$.

Не для любых натуральных чисел *m* и *k* существует такое натуральное число *q*, что $m = k \cdot q$. Представляет интерес выделение тех случаев, когда деление возможно.

1. Для того чтобы натуральное число $m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц a_0 этого числа делилась на 2.

Числа расширенного натурального ряда, делящиеся на два, называются *четными* числами. Все остальные натуральные числа называются *нечетными.*

2. Для того чтобы натуральное число $m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 3 (или на 9), необходимо и достаточно, чтобы сумма всех цифр данного числа делилась на 3 (или на 9).

3. Для того чтобы натуральное число $m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 4 (или на 25), необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_1 a_0}$ делилось на 4 (или на 25).

Например, число 1232 делится на 4, так как число 32 делится на 4, а число 14 126 не делится на 4, так как число 26 не делится на 4.

4. Для того чтобы натуральное число $m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц a_0 этого числа равнялась бы нулю или пяти.

5. Для того чтобы натуральное число $m = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делилось на 8 (или на 125), необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делилось на 8 (или на 125).

Например, число 936 250 делится на 125, так как число 250 делится на 125.

1.1.4. Метод математической индукции

При доказательстве утверждения, зависящего от натурального числа $n \geq n_0$, в том числе связанного с делимостью чисел, применяется метод математической индукции, сущность которого формулируется так.

1. Проверяется справедливость утверждения для $n = n_0$.
2. Предполагается справедливость этого утверждения для $n = k$, где $k \geq n_0$.
3. Доказывается справедливость этого утверждения для $n = k + 1$ с учетом его справедливости для $n = k$.

После этого делается вывод, что утверждение справедливо для любого натурального $n \geq n_0$.

1.2. Целые числа (Z)

Множество чисел, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех целых отрицательных чисел, называется множеством целых чисел (Z).

1.2.1. Деление с остатком

Часто в задачах встречается деление целого числа на натуральное число.

Теорема 1.5

Пусть a — любое целое число, k — любое натуральное число. Тогда существует единственная пара целых чисел q *и* r*, удовлетворяющая условиям* $a = kq + r,\ \ 0 \leq r < k$.

Следствие 1

Любое целое число a*, делящееся нацело на некоторое натуральное число* k*, может быть записано в виде* $a = kq$*, где q — частное* ($q \in Z$).

Следствие 2

Любое целое число a*, не делящееся нацело на некоторое натуральное число* k*, может быть записано в виде* $a = kq + r$*, где q — частное* ($q \in Z$)*, r — остаток — одно из чисел* 1, 2, 3,..., (k – 1).

Например, частное от деления числа 37 на 7 равно 5, а остаток равен 2 ($37 = 7 \cdot 5 + 2$), а частное от деления числа 3 на число 5 равно 0, а остаток равен 3 $(3 = 5 \cdot 0 + 3)$, частное от деления числа (-37) на 5 равно (-8), а остаток равен 3 $(-37 = 5 \cdot (-8) + 3)$ (остаток всегда положителен).

Из теоремы 1.5 также следует, что любое целое число *a* можно записать в одной из следующих форм:

$$a = \left[\begin{array}{l} kq \\ kq+1 \\ kq+2 \\ . \\ . \\ . \\ kq+(k-1), \end{array}\right.$$

где q — целое число, k — натуральное фиксированное число, называемое *модулем* представления.

Например, если в качестве модуля представления взять число $k = 2$, то любое целое число *a* можно записать как

$$a = \left[\begin{array}{l} 2q \\ 2q+1, q \in Z, \end{array}\right.$$

т. е. множество всех целых чисел разбивается на два класса: четные числа и нечетные числа.

Если в качестве модуля представления взять число $k = 3$, то любое целое число a можно записать как

$$a = \left[\begin{array}{l} 3q \\ 3q+1 \\ 3q+2, q \in Z. \end{array}\right.$$

В этом случае множество всех целых чисел разбивается на три класса.

Теорема 1.6

Если каждое из слагаемых суммы $a + b$ *делится на число* k*, то и сама сумма делится на* k.

Например, так как число 8 делится на 4, и число 16 делится на 4, то и их сумма 8 + 16 = 24 также делится на 4.

Теорема 1.7

Произведение вида $n(n+1)(n+2)...(n+k-1)$*, составленное из* k *последовательных целых чисел* $n, n+1, n+2, ..., n+k-1$ *делится на* k.

Например, произведение чисел $45\cdot 46\cdot 47$ делится на 3.

Теорема 1.8

Если число a *делится на каждое из двух взаимно простых чисел* p *и* q*, то* a *делится и на их произведение* $p\cdot q$.

Например, так как число 240 делится на каждое из двух взаимно простых чисел 15 и 8, то оно также делится на их произведение, равное 120.

Для решения задач, связанных с делимостью чисел, часто удобной оказывается следующая теорема.

Теорема 1.9

Уравнение вида

$$\boxed{ak+bm=c,}$$

где k *и* m *— неизвестные целые числа*; a, b *— заданные целые взаимно простые числа, не равные нулю, а* c *— заданное целое число, имеет целочисленные решения, определяемые по формуле*

$$\boxed{\begin{aligned} &k=k_0-bt,\\ &m=m_0+at,\\ &t\in Z, \end{aligned} \qquad (1.1)}$$

где k_0, m_0 — произвольное решение уравнения (его можно искать подбором).

Например, уравнение 3k – 2m = 1 имеет целочисленные решения k = 1 + + 2t, m = 1 + 3t, $t\in Z$. (Здесь $a=3;\ b=-2;\ k_0=1,\ m_0=1.$)

1.3. Рациональные числа (Q)

Множество чисел, состоящее из чисел вида $\frac{p}{q}$, где q — натуральное число, а p — целое число, называется множеством рациональных чисел (Q).

Теорема 1.10

Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Например, $-\frac{1}{8}=-0{,}125(0)$, где в скобках стоит бесконечно повторяющаяся цифра, $-\frac{4}{33}=-0,(12)$, где в скобках стоят бесконечно повторяющиеся цифры.

1.4. Иррациональные числа (I)

Множество чисел, состоящее из бесконечных непериодических десятичных дробей, называется множеством иррациональных чисел (I).

Например, числа $\sqrt{2};\sqrt{3},\sqrt{17}$ являются иррациональными. Можно показать, что иррациональными являются все числа вида $\sqrt{n}$, где $n \neq r^2$, $r \in Z$, хотя это множество не исчерпывает множества всех иррациональных чисел. Например, можно доказать, что $\cos 1^0$ — число иррациональное.

1.5. Действительные числа (R)

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел (R).

Определение 1.5

Целой частью действительного числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a. Целая часть обозначается $[a]$.

Например, $[27{,}2] = 27$, $[0{,}54] = 0$, $[-3] = -3$, $[-4{,}6] = -5$.

1.5.1. Числовые промежутки

Возьмем два числа a и b, такие, что $a < b$.

1. Множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x < b$, обозначают $(a;b)$ и называют *интервалом.*

2. Множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leq x \leq b$, обозначают $[a;b]$ и называют *отрезком.*

3. Множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, обозначают $[a;b)$ или $(a;b]$ и называют *полуинтервалом.*

4. Множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a \leq x < \infty$ или $-\infty < x \leq b$, обозначают $[a;\infty)$ или $(-\infty;b]$ и называют лучом.

5. Множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $a < x < \infty$ или $-\infty < x < b$, обозначают $(a;\infty)$ или $(-\infty;b)$ и называют открытым лучом.

На практике часто эти термины заменяют их общим названием «числовой промежуток».

1.6. Задачи с решениями

Задача 1. Найти НОК и НОД чисел m = 1428, n = 420.

Решение.

В соответствии с правилами нахождения НОК и НОД:

а) разложим числа m и n на простые множители

1428	2		420	2
714	2		210	2
357	3		105	3
119	7		35	5
17	17		7	7
1			1	

$$m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7 \cdot 17 \quad n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17^0.$$

Для того чтобы количество общих множителей в разложении было одинаковым, недостающие множители представим в виде $1 = 5^0$ и $1 = 17^0$.

б) запишем НОК (m,n) в виде произведения общих множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем степени:

$$\text{НОК}(1428,420) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = 7140.$$

в) запишем НОД (m,n) в виде произведения общих множителей, взяв каждый из них с наименьшим показателем степени:

$$\text{НОД}(1428,420) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7 \cdot 17^0 = 84.$$

Ответ: НОК(1428,420) = 7140, НОД(1428,420) = 84.

Разбиение всех целых чисел на классы в соответствии с теоремой 1.5 может быть применено при решении ряда задач.

Задача 2. Докажите, что для любого целого числа n число n(n + 1) делится на 2.

Решение.

Первый способ.

Для решения задачи можно сразу применить теорему 1.7, в которой следует считать k = 2.

Второй способ.

Разобьем множество всех целых чисел n на два класса (k = 2):

$$\left[\begin{array}{l} n = 2q \\ n = 2q + 1, q \in Z. \end{array}\right.$$

Тогда, если n = 2q, $q \in Z$, то n(n + 1) = 2q(2q + 1), что делится на 2.

Если же n = 2q + 1, $q \in Z$, то n(n + 1) = (2q + 1)(2q + 2), что также делится на 2.

Третий способ.

Решим задачу методом математической индукции.

Пусть $n \in N$.

1. При n = 1 число 1 · 2 делится на 2.

2. Предположим справедливость утверждения для n = k, $k \geq 1$, т. е. число k(k + 1) делится на 2.

3. Докажем тогда, что и число (k + 1)(k + 2) делится на 2.

Запишем (k + 1)(k + 2) в виде k(k + 1) + 2(k + 1). Первое слагаемое этого выражения делится на 2 по предположению, второе слагаемое также делится на 2. По теореме 1.6 и сумма k(k + 1) + 2(k + 1) также делится на 2.

Следовательно число n(n + 1) делится на 2 при всех натуральных n. Пусть $n \leq 0$.

Введем новую величину $m = -n \geq 0$. Тогда $m \in Z_0$. Задача при этом формулируется так: доказать, что число –m(1 – m) при $m \geq 0$ делится на 2.

1. При m = 0 и m = 1 данное число равно 0 и делится на 2.

2. Предположим справедливость утверждения для m = k $\in N$, $k \geq 1$, т. е. число $-k(1-k)$ делится на 2.

3. Тогда надо доказать, что число $-(k+1)(-k)=(k+1)k$ при $k \in N$, $k \geq 1$ делится на 2, но это уже было доказано выше.

Следовательно, число $n(n + 1)$ при $n \leq 0$ также делится на 2.

В результате получаем, что для любого целого числа n число $n(n+1)$ делится на 2.

Задача 3. Докажите, что при любом целом n число $a = n^2(n^2 – 1)$ делится на 4.

Решение.

Первый способ.

Запишем число a в виде $a = [(n – 1)n][n(n + 1)]$. Каждый из сомножителей в квадратных скобках в соответствии с задачей 2 делится на 2 и, следовательно, данное число a делится на 4.

Второй способ.

Разобьем множество всех целых чисел n на четыре класса (k = 4):

$$n = 4q,$$
$$n = 4q + 1,$$
$$n = 4q + 2,$$
$$n = 4q + 3,\ q \in Z.$$

Для решения задачи достаточно показать, что число $n^2\left(n^2-1\right)$ делится на 4 при любом целом числе n, взятом из каждого класса.

Если $n = 4q$, $q \in Z$, то $a = (4q)^2[(4q)^2 – 1]$ делится на 4.

Если $n = 4q + 1$, $q \in Z$, то $a = (4q + 1)^2[(4q + 1)^2 – 1] = (4q + 1)^2 [4q(4q + 2)]$ делится на 4.

Если $n = 4q + 2$, $q \in Z$, то $a = (4q + 2)^2[(4q + 2)^2 – 1] = 4[(2q + 1)^2][(4q + 2)^2 – 1]$ делится на 4.

Если $n = 4q + 3$, $q \in Z$, то $a = (4q + 3)^2[(4q + 3)^2 – 1] = (4q + 3)^2[4(q + 1)(4q + 2)]$ делится на 4.

Следовательно, данное число делится на 4 при любом целом n.

Задача 4. Докажите, что ни при каком целом n число $a = n^2 + 1$ не делится на 3.

Решение.

Разобьем множество всех целых чисел на три класса (k = 3):

$$n = 3k,$$
$$n = 3k + 1,$$
$$n = 3k + 2,\ k \in Z.$$

Для решения задачи достаточно показать, что число n^2+1 не делится на 3 при любом целом числе n, взятом из каждого класса.

Если $n = 3k$, то $a = (3k)^2 + 1$ не делится на 3 (остаток 1).

Если $n = 3k + 1$, то $a = (3k + 1)^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$ не делится на 3 (остаток 2).

Если $n = 3k + 2$, то $a = (3k + 2)^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 5$ не делится на 3 (остаток 5).

Следовательно, данное число не делится на 3 при любом целом n.

Задача 5. Найти частные q и остатки r при делении чисел $5; 10; 100; -7; -50$ на число 7.

Решение. В соответствии со следствием 2 теоремы 1.5, получим

а) $5=7\cdot 0+5 \Rightarrow q=0; r=5,$

б) $10 = 7 \cdot 1 + 3 \Rightarrow q = 1; r = 3$,

в) $100 = 7 \cdot 14 + 2 \Rightarrow q = 14; r = 2$,

г) $-7 = 7 \cdot (-1) + 0 \Rightarrow q = -1; r = 0$,

д) $-50 = 7 \cdot (-8) + 6 \Rightarrow q = -8, r = 6$.

Задача 6. Найти наибольшее трехзначное число, которое при делении на 6 дает остаток 5,а при делении на 4 дает остаток 3.

Решение.

Обозначим искомое число a. Тогда a = $6q_1 + 5$ и a = $4q_2 + 3$ (следствие 2 теоремы 1.5).

Приравняв выражения и сократив на 2, получим $2q_2 - 3q_1 = 1$.

Для дальнейшего решения задачи воспользуемся теоремой 1.9 $(a = 2; b = -3)$.

Подбором находим одно из решений $q_{1_0} = 1; q_{2_0} = 2.$ В соответствии с выражением (1.1) получим целочисленные решения данного уравнения:

$q_1 = 1 + 2t$,

$q_2 = 2 + 3t$, $t \in Z$.

Тогда a = 6(1 + 2t) + 5 = 12t + 11, причем по условию a = 12t + 11 $\le$ 999. Решая неравенство, получим $t \le \dfrac{988}{12}$. Наибольшее целое значение t, удовлетворяющее неравенству, равно $t_N = \left[\dfrac{988}{12}\right] = 82$.

Откуда следует, что наибольшее трехзначное число будет равно $a = 12 \cdot 82 + 11 = 995$.

Ответ: 995.

Задача 7. Известно, что целое число a при делении на 5 дает остаток 1, а при делении на 3 дает остаток 2. Найти остаток от деления числа a на 15.

Решение.

Первый способ.

Имеем a = $5q_1 + 1$ и a = $3q_2 + 2$, $q_1.q_2 \in Z$. Тогда $5q_1 - 3q_2 = 1$. Подбором находим $q_{1_0} = 2; q_{2_0} = 3$. В соответствии с (1.1) $q_1 = 2 + 3t$, $q_2 = 3 + 5t$, $t \in Z$.

Число a при этом имеет вид a = $5q_1 + 1$ = 5(2 + 3t) + 1 = 15t + 11. Видно, что остаток от деления данного числа на 15 равен 11.

Второй способ.

Имеем a = $5q_1 + 1$ и a = $3q_2 + 2$, $q_1,q_2 \in Z$. Умножим первое уравнение на 3, а второе — на 5, получим 3a = $15q_1 + 3$ (*) и 5a = $15q_2 + 10$ (**), $q_1, q_2 \in Z$. Вычтем из уравнения (**) уравнение (*). Тогда 2a = $15(q_2 - q_1) + 7$. Далее вычтем полученное выражение из (*). Получим

$$a = 15(2q_1 - q_2) - 4 = 15(2q_1 - q_2 - 1) + 11 = 15q^* + 11, \text{ где } q^* = (2q_1 - q_2 - 1) \in Z,$$

a 11 — искомый остаток от деления числа a на 11 (помним, что остаток всегда положителен).

Ответ: 11.

Разбиение множества чисел на классы может быть также применено в задачах, связанных с простыми числами.

Задача 8. Известно, что числа p, p+10, p+14 — простые. Чему равно p?

Решение.

Число p = 2 не удовлетворяет условию задачи, а p = 3 удовлетворяет. Далее разобьем множество натуральных чисел p, включающее множество всех простых чисел, не меньших чем 3, на три класса:

$$p = 3q,$$
$$p = 3q + 1,$$
$$p = 3q + 2,\ q \geq 1, q \in N.$$

Тогда, если $p = 3q$, $q \geq 1$, $q \in N$, то из чисел $3q$, $3q + 10$, $3q + 14$ первое не является простым.

Если $p = 3q + 1$, $q \geq 1$, $q \in N$, то из чисел $3q + 1$, $3q + 11$, $3q + 15$ третье не является простым.

Если $p = 3q + 2$, $q \geq 1$, $q \in N$, то из чисел $3q + 2$, $3q + 12$, $3q + 16$ второе не является простым.

Таким образом, только при p = 3 имеем простые числа 3,13,17.

Ответ: $p = 3$.

Задача 9. Доказать, что числа n и n + 1 ($n \in N$) взаимно просты?

Решение.

Первый способ.

Числа n и n + 1 можно в соответствии с теоремой 1.3 представить в виде $n = a^* \cdot НОД(n, n + 1)$, $n + 1 = b^* \cdot НОД(n, n + 1)$, где a^* и b^* — взаимно просты. Вычитая из второго равенства первое, получим $1 = (b^* - a^*) \cdot НОД(n, n + 1)$. Отсюда следует, что НОД(n, n + 1) = 1 и, следовательно, числа n и n + 1 взаимно просты.

Второй способ.

Пусть некоторое натуральное число k > 1 является общим делителем чисел n и n + 1.

Тогда $\frac{n}{k} = m$ — натуральное число, а $\frac{n+1}{k} = \frac{n}{k} + \frac{1}{k} = m + \frac{1}{k}$ не является натуральным числом, так как $0 < \frac{1}{k} < 1$, т. е. предположение, что k > 1 неверно, следовательно k = 1, т. е. числа n и n + 1 взаимно просты.

Задача 10. Найти два натуральных числа, если их сумма равна 85, а их НОК равно 102.

Решение.

Обозначим искомые числа m и n. Тогда m + n = 85. В соответствии с теоремой 1.3 $m = m^* \cdot НОД(m, n)$ и $n = n^* \cdot НОД(m, n)$ и, следовательно, $(m^* + n^*) \cdot$ $\cdot\, НОД(m, n) = 85$, где m^* и n^* — взаимно просты. Откуда следуют возможные варианты решения:

а) $m^* + n^* = 85$, НОД(m, n) = 1;

б) $m^* + n^* = 17$, НОД(m, n) = 5;

в) $m^* + n^* = 5$, НОД(m, n) = 17;

г) $m^* + n^* = 1$, НОД(m, n) = 85.

Из теоремы 1.4 получим, что $m^* \cdot n^* = \dfrac{102}{НОД(m,n)}$. Тогда задача сводится к решению следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} m^* + n^* = 85 \\ m^* \cdot n^* = 102, \end{cases}$ НОД(m, n) = 1;

б) $\begin{cases} m^* + n^* = 17 \\ m^* \cdot n^* = \dfrac{102}{5} \notin N, \end{cases}$ НОД(m, n) = 5;

в) $\begin{cases} m^* + n^* = 5 \\ m^* \cdot n^* = 6, \end{cases}$ НОД(m, n) = 17;

г) $\begin{cases} m^* + n^* = 1 \\ m^* \cdot n^* = \dfrac{102}{85} \notin N, \end{cases}$ НОД(m, n) = 85.

Очевидно, что системы б) и г) не имеют решений в натуральных числах. Легко проверить, что система а) также не имеет решений в натуральных числах. Система в) имеет решение $m^* = 3$, $n^* = 2$ при НОД(m, n) = 17. Таким образом, искомые числа равны $m = 3 \cdot 17 = 51$, $n = 2 \cdot 17 = 34$.

Ответ: $m = 51, n = 34$.

Задача 11. Найти два натуральных числа, если их сумма равна 667, а частное от деления их НОК на НОД равно 120.

Решение.

Обозначим искомые числа m и n. Тогда m + n = 667. В соответствии с теоремой 1.3, $(m^* + n^*) \cdot$ НОД(m, n) = 667 = 23 · 29, где m^* и n^* — взаимно просты.

В соответствии с теоремой 1.4, $m^* \cdot n^* = 120$.

Тогда задача сводится к решению следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} m^* + n^* = 1 \\ m^* \cdot n^* = 120, \end{cases}$ НОД(m, n) = 667; б) $\begin{cases} m^* + n^* = 23 \\ m^* \cdot n^* = 120, \end{cases}$ НОД(m, n) = 29;

в) $\begin{cases} m^* + n^* = 29 \\ m^* \cdot n^* = 120, \end{cases}$ НОД(m, n) = 23; г) $\begin{cases} m^* + n^* = 667 \\ m^* \cdot n^* = 120, \end{cases}$ НОД(m, n) = 1.

Очевидно, что системы а) и г) решений не имеют. Система б) имеет решение $m^* = 15$, $n^* = 8$, а система в) меет решение $m^* = 24$, $n^* = 5$.

Тогда искомые числа равны m = 15 · 29 = 435, n = 8 · 29 = 232 или m = = 24 · 23 = 552, n = 5 · 23 = 115.

Ответ: $m = 435, n = 232$ или $m = 552, n = 115$.

Задача 12. Найти два натуральных числа, если их НОД равен 5, а НОК равен 60.

Решение.

Обозначим искомые числа m и n. В соответствии с теоремами 1.3 и 1.4 получим $m = 5m^*$, $n = 5n^*$, $m^* \cdot n^* = 12$, где m^* и n^* — взаимно просты.

При этом возможны следующие варианты:

а) $m^* = 1$, $n^* = 12$, $m = 5$, $n = 60$;

б) $m^* = 3$, $n^* = 4$, $m = 15$, $n = 20$.

Ответ: $m = 5; n = 60$ или $m = 15, n = 20$.

Задача 13. Найти два натуральных числа, если их НОК равен 8100, а сумма их квадратных корней равна 48.

Решение.

Обозначим искомые числа m и n. Тогда $\sqrt{m} = \sqrt{m^*}\sqrt{\text{НОД}(m,n)}$, $\sqrt{n} = \sqrt{n^*}\sqrt{\text{НОД}(m,n)}$ и $(\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*})\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 48$, $m^* \cdot n^* = \dfrac{8100}{\text{НОД}(m,n)}$, где m^* и n^* — взаимно просты.

Очевидно, $\sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = \dfrac{90}{\sqrt{\text{НОД}(m,n)}}$.

При этом возможны следующие варианты:

а) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 48\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = 90,\end{cases}$ $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 1$; б) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 24\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = 45,\end{cases}$ $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 2$;

в) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 16\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = 30,\end{cases}$, $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 3$; г) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 12\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = \dfrac{90}{4} \notin N,\end{cases}$ $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 4$;

д) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 8\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = 15,\end{cases}$ $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 6$; е) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 6\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = \dfrac{90}{8} \notin N,\end{cases}$ $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 8$;

ж) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 4\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = \dfrac{90}{12} \notin N,\end{cases}$ $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 12$; з) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 2\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = \dfrac{90}{24} \notin N,\end{cases}$ $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 24$;

и) $\begin{cases}\sqrt{m^*} + \sqrt{n^*} = 1\\ \sqrt{m^*}\sqrt{n^*} = \dfrac{90}{48} \notin N,\end{cases}$ $\sqrt{\text{НОД}(m,n)} = 48$.

Очевидно, что системы г), е), ж), з), и) не имеют решения в натуральных числах.

Легко проверить, что системы а), б), в) также не имеет решений в натуральных числах, а система д) имеет решение $m^* = 25$, $n^* = 9$.

Тогда $m = 25 \cdot 36 = 900$ и $n = 9 \cdot 36 = 324$.

Ответ: $m = 900, n = 324$.

1.7. Множества. Операции над множествами. Объединение и пересечение множеств

Употребляя термин «множество», будем понимать под этим любое собрание (совокупность) определенных и различимых между собой элементов, мыслимое как единое целое. Например, мы можем говорить о множестве букв на данной странице, о рассмотренных ранее числовых множествах (натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел).

Пусть A и B — произвольные множества.

Определение 1.6

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех таких элементов, каждый из которых содержится хотя бы в одном из данных множеств A и B. Для объединения множеств употребляется знак: $C = A \bigcup B$.

Например, если A = {1;2;3;4} и B = {2;3;4;5}, то C = {1;2;3;4;5} или $(-1;2] \bigcup [-2;1) = [-2;2]$, например, справедливы следующие соотношения для числовых множеств $\mathrm{R} = \mathrm{Q} \bigcup \mathrm{I}$, $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{N} \bigcup \{0\}$.

Определение 1.7

Пересечением множеств A и B называется множество L, элементами которого будут те и только те элементы, которые одновременно являются элементами и первого и второго множеств, т. е. пересечение двух множеств есть общая часть этих множеств. Для пересечения множеств употребляется знак: $L = \mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}$.

Например, если A = {0;1;2;3} и B = {2;3;4;5;6}, то L = {2;3} или $(-\infty;1] \bigcap (0;3) = (0;1]$.

1.7.1. Объединение элементов двух множеств

Теорема 1.11

Пусть $m(A)$ *— число элементов конечного множества A,* $m(B)$ *— число элементов конечного множества B. Тогда*

$$\boxed{m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)}$$

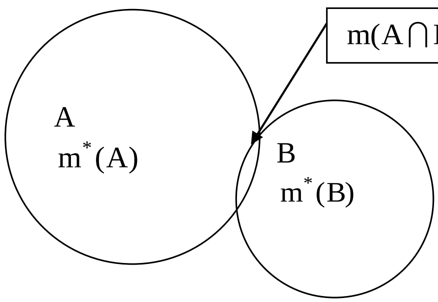


Рис. 1.1

Объединение элементов двух множеств

Доказательство.

Действительно, пусть $m^*(A)$ и $m^*(B)$ число элементов, принадлежащих только множеству A и только множеству B соответственно (рис. 1.1).

Тогда очевидно, что

$$m(A) = m^*(A) + m(A \cap B), \quad m(B) = m^*(B) + m(A \cap B) \tag{1.2}$$

$$\text{и } m(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) + m(A \cap B). \tag{1.3}$$

Складывая уравнения в выражении (1.2), получим

$$m(A) + m(B) = m^*(A) + m^*(B) + 2m(A \cap B),$$

откуда $m^*(A) + m^*(B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B)$.

Подставляя последнее выражение в (1.3), запишем $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, что требовалось доказать.

1.7.2. Объединение элементов трех множеств

Теорема 1.12

Пусть $m(A)$ — число элементов конечного множества A, $m(B)$ — число элементов конечного множества B, $m(C)$ — число элементов конечного множества C.

Тогда

$$\boxed{m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)}$$

Следствие 1

Пусть $m(A)$ — число элементов конечного множества A, $m(B)$ — число элементов конечного множества B, $m(C)$ — число элементов конечного множества C. Тогда число элементов, принадлежащих только множеству A, — $m^*(A)$, только множеству B — $m^*(B)$ и только множеству C — $m^*(C)$ соответственно равны:

$$\boxed{\begin{aligned} m^*(A) &= m(A) - m(A \cap C) - m(A \cap B) + m(A \cap B \cap C), \\ m^*(B) &= m(B) - m(B \cap A) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C), \\ m^*(C) &= m(C) - m(C \cap A) - m(C \cap B) + m(A \cap B \cap C) \end{aligned}}$$

Следствие 2

Пусть $m(A)$ — число элементов конечного множества A, $m(B)$ — число элементов конечного множества B, $m(C)$ — число элементов конечного множества C. Тогда

$$\boxed{m(A \cup B \cup C) = m^*(A) + m^*(B) + m^*(C) + m(A \cap C) + m(A \cap B) + m(B \cap C) - 2m(A \cap B \cap C)}$$

1.8. Задачи с решениями

Задача 1. Экзамен по математике сдавали 250 человек. Оценку ниже 5 получили 180 человек, а выдержали экзамен 210 человек. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

Решение.

Обозначим $m(A)$ — количество человек, получивших оценки ниже пяти (т. е. получивших оценки 2,3,4), а $m(B)$ — количество человек, выдержавших экзамен (т. е. получивших оценки 3,4,5) и $m(C)$ — общее число сдававших экзамен.

В соответствии с теоремой 1.11 получим

$$m(A \cup B) = m(C) = m(A) + m(B) - m(A \cap B),$$

где $m(A \cap B)$ — количество человек, получивших оценки 3 и 4. Откуда находим, что $m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 180 + 210 - 250 = 140$.

Ответ: 140 человек.

Задача 2. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 человек знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Решение.

Пусть $m(A)$ — число туристов, знающих английский язык, $m(B)$ — число туристов, знающих французский язык, $m(A \cap B)$ — число туристов, знающих английский и французский язык. Обозначим $\overline{m(A \cup B)}$ – число туристов, не знающих ни английского, ни французского языка. Общее число туристов, знающих английский или французский язык в соответствии с теоремой 1.11 равно $m(A \cup B) = 70 + 45 - 23 = 92$ туриста. Тогда число туристов, не знающих ни английского, ни французского языка равно $\overline{m(A \cup B)} = 100 - 92 = 8$.

Ответ: 8 туристов.

Задача 3. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников класса читал книги A, B, C. Результаты опроса оказались таковы: книгу A читало 25 учащихся, книгу B — 22, книгу C — 22. Книгу A или B читало 33 ученика, A или C — 32, B или C — 31. Все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников не читали ни одной из этих книг? Сколько учеников прочли только по одной книге?

Решение.

Пусть $m(A)$ — число учащихся, прочитавших книгу A, $m(B)$ — число учащихся, прочитавших книгу B, $m(C)$ — число учащихся, прочитавших книгу C. Обозначим $\overline{m(A \cup B \cup C)}$ – число учащихся, не прочитавших ни одной из книг. Тогда в соответствии с теоремой 1.12 число учащихся прочитавших хотя бы одну книгу равно

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + \\ + m(A \cap B \cap C).$$

При этом по условию $m(A \cup B) = 33$, $m(A \cup C) = 32$, $m(B \cup C) = 31$.

Так как $m(A \cup B) = 33 = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 25 + 22 - m(A \cap B)$, то $m(A \cap B) = 14$.

Так как $m(A \cup C) = 32 = m(A) + m(C) - m(A \cap C) = 25 + 22 - m(A \cap C)$, то $m(A \cap C) = 15$.

Так как $m(B \cup C) = 31 = m(B) + m(C) - m(B \cap C) = 22 + 22 - m(B \cap C)$, то $m(B \cap C) = 13$; $m(A \cap B \cap C) = 10$.

Тогда $m(A \bigcup B \bigcup C) = 25 + 22 + 22 - 14 - 15 - 13 + 10 = 37$ и число учащихся, не прочитавших ни одной из данных книг равно

$$\overline{m(A \bigcup B \bigcup C)} = 40 - 37 = 3.$$

Общее число учащихся, прочитавших только по одной книге (т. е. только книгу А + только книгу В + только книгу С) в соответствии со следствием 1 теоремы 1.12 равно

$$m^*(A) + m^*(B) + m^*(C) = m(A) + m(B) + m(C) - 2m(A \bigcap B) - 2m(A \bigcap C) -$$
$$- 2m(B \bigcap C) + 3m(A \bigcap B \bigcap C) = 25 + 22 + 22 - 28 - 30 - 26 + 30 = 15.$$

Ответ: Число учащихся, не прочитавших ни одной из данных книг равно 3, число учащихся, прочитавших только по одной книге равно 15.

Задача 4. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в институт, оценку «отлично» получили: по математике — 48 абитуриентов, по физике — 37, по русскому языку — 42, по математике или физике — 75, по математике или русскому языку — 76, по физике или русскому языку — 66, по всем трем предметам — 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получили только одну пятерку?

Решение.

Обозначим $m(A)$ — число абитуриентов, получивших по математике оценку «отлично», $m(B)$ — число абитуриентов, получивших по физике оценку «отлично», $m(C)$ — число абитуриентов, получивших по русскому языку оценку «отлично». Тогда по условию $m(A \bigcup B) = 75$, $m(A \bigcup C) = 76$, $m(B \bigcup C) = 66$ и $m(A \cap B \cap C) = 4$.

Число абитуриентов, получивших хотя бы одну пятерку равно (теорема 1.12) $m(A \bigcup B \bigcup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$.

Так как $m(A \bigcup B) = 75 = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 48 + 37 - m(A \cap B)$, то $m(A \cap B) = 10$.

Так как $m(A \bigcup C) = 76 = m(A) + m(C) - m(A \cap C) = 48 + 42 - m(A \cap C)$, то $m(A \cap C) = 14$.

Так как $m(B \bigcup C) = 66 = m(B) + m(C) - m(B \cap C) = 37 + 42 - m(B \cap C)$, то $m(B \cap C) = 13$.

Тогда $m(A \bigcup B \bigcup C) = 48 + 37 + 42 - 10 - 14 - 13 + 4 = 94$.

Число абитуриентов, которые получили только пятерку по математике равно (следствие 1 теоремы 1.12):

$$m^*(A) = m(A) - m(A \cap C) - m(A \cap B) + m(A \cap B \cap C) = 48 - 10 - 14 + 4 = 28;$$

по физике:

$$m^*(B) = m(B) - m(B \cap A) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) = 37 - 10 - 13 + 4 = 18;$$

по русскому языку:

$$m^*(C) = m(C) - m(C \cap A) - m(C \cap B) + m(A \cap B \cap C) = 42 - 14 - 13 + 4 = 19.$$

Тогда общее число абитуриентов, получивших только одну пятерку равно $m^*(A) + m^*(B) + m^*(C) = 28 + 18 + 19 = 65$.

Ответ: Число абитуриентов, получивших хотя бы одну пятерку равно 94, а получивших только одну пятерку равно 65.

Задача 5. В течение недели в кинотеатре демонстрируются фильмы A, B и C. Из 40 школьников, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13, фильм B — 16, фильм C — 19 школьников.

Найти, сколько учеников просмотрели все три фильма?

Решение.

По условию $m(A \cap C) = m(A \cap B) = m(B \cap C) = m(A \cap B \cap C)$ (*) и $m(A) = 13, m(B) = 16, m(C) = 19.$

Воспользуемся теоремой 1.12.

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + \\ + m(A \cap B \cap C).$$

Подставляя $m(A \cup B \cup C) = 40$, учитывая (*), получим уравнение $40 = 48 - 2m(A \cap B \cap C)$, из которого следует, что $m(A \cap B \cap C) = 4$.

Ответ: 4 ученика.

Задача 6. В спортивном лагере отдыхают N школьников. Из них 65% умеют играть в футбол, 70% — в волейбол, 75% — в баскетбол. Найти наименьшее число школьников, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

Решение.

Из условия задачи следует, что в футбол умеют играть $m(A) = 0{,}65N$ — школьников, в волейбол умеют играть $m(B) = 0{,}7N$ — школьников и в баскетбол умеют играть $m(C) = 0{,}75N$ школьников.

В соответствии с теоремой 1.12 имеем

$$N = m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + \\ + m(A \cap B \cap C) = 0{,}65N + 0{,}7N + 0{,}75N - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + \\ + m(A \cap B \cap C) = 2{,}1N - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C) \text{ или} \\ 1{,}1N = m(A \cap B) + m(A \cap C) + m(B \cap C) - m(A \cap B \cap C). \ (*)$$

С другой стороны, из следствия 2 теоремы 1.12 следует:

$$N = m^*(A) + m^*(B) + m^*(C) + m(A \cap C) + m(A \cap B) + m(B \cap C) - 2m(A \cap B \cap C). \ (**)$$

Вычитая из (*) выражение (**), получим

$$0{,}1N = m(A \cap B \cap C) - m^*(A) - m^*(B) - m^*(C) \text{ или}$$

$$m(A \cap B \cap C) = 0{,}1N + m^*(A) + m^*(B) + m^*(C) \geq 0{,}1N.$$

Таким образом, наименьшее число школьников, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол составляет 0,1N.

Ответ: 0,1N.

ГЛАВА 2
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

2.1. Модуль действительного числа или математического выражения

Определение 2.1

Модулем или абсолютной величиной $|a|$ *действительного числа* a *называется число, определяемое по правилу:*

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } \ a \geq 0, \\ -a, \text{если } \ a < 0. \end{cases}$$

Модулем (*или абсолютной величиной*) *математического выражения называется выражение, определяемое по правилу:*

$$|\text{выражение}| = \begin{cases} \text{выражение, если } \ \text{выражение} \geq 0, \\ -\text{выражение, если } \ \text{выражение} < 0. \end{cases}$$

Пример 1

$$|-7| = 7, \ \ |x-6| = \begin{cases} x-6, \text{если } \ x-6 \geq 0, \\ -(x-6), \text{если } \ x-6 < 0. \end{cases}$$

2.2. Основные теоретические сведения об уравнениях

2.2.1. Равносильность уравнений

Определение 2.2

Областью определения уравнения[1] $f(x) = g(x)$ *называется множество таких значений x, при которых и функция* $f(x)$ *и функция* $g(x)$ *определены.*

Иными словами, область определения уравнения $f(x) = g(x)$ — это пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Определение 2.3

Два уравнения называются равносильными, если совпадают множества всех их решений или они оба не имеют решений.

Из определения равносильности следует, что вместо того чтобы решать данное уравнение, можно решать уравнение, ему равносильное.

Пример 2

Уравнение $x = 1$ равносильно уравнению $\sqrt{x} = 1$, так как число 1 является корнем каждого уравнения, а других корней ни одно из этих уравнений не име-

[1] Часто также называют областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения.

ет. Уравнения $x(x-1)=0$ и $x(x-1)(x-2)=0$ не являются равносильными, так как число $x=2$ — корень второго уравнения, но не корень первого.

В определении равносильности не сказано об ОДЗ уравнений, т. е. равносильные уравнения могут иметь различные области допустимых значений. При решении уравнений вместо понятия равносильности можно использовать понятие равносильности на множестве: два уравнения называются равносильными на множестве A, если совпадают множества всех их решений, принадлежащих множеству A, или они оба не имеют решений на множестве A.

Уравнения могут быть равносильными на некотором множестве, но не быть равносильными. Например: уравнения $x = 1$ и $|x| = 1$ равносильны на множестве всех неотрицательных чисел, но не равносильны.

2.2.2. Совокупность уравнений. Решение совокупности уравнений

Определение 2.4

Несколько уравнений с одной переменной образуют совокупность уравнений, если ставится задача об отыскании всех таких значений переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из заданных уравнений.

Решением совокупности уравнений является объединение множеств корней уравнений, составляющих данную совокупность.

Уравнения, образующие совокупность, записываются в столбик с помощью квадратной скобки, например:

$$\left[\begin{array}{l} 2x+3=3x+7 \\ 4x-3=x^2. \end{array}\right.$$

Уравнение равносильно данной совокупности уравнений на множестве A, если множество всех корней уравнений, принадлежащих A, совпадает со множеством всех решений совокупности уравнений, принадлежащих множеству A.

Пример 3

Уравнение $(x^2+x+1)(3x+4)(-7x+2)(2x-5)(-12x-16)=0$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3x+4=0 \\ -7x+2=0 \\ 2x-5=0 \\ 12x+16=0 \end{array}\right.$$

на множестве всех действительных чисел. Так как $x^2 + x + 1 > 0$ при любом x, то данное уравнение равносильно уравнению

$$(3x+4)(-7x+2)(2x-5)(-12x-16)=0.$$

Любой корень этого уравнения обращает в нуль хотя бы один из входящих в него многочленов, т. е. является корнем хотя бы одного из уравнений данной совокупности. Наоборот, проверкой убеждаемся, что любой корень совокупности удовлетворяет данному уравнению. Поэтому уравнение и данная совокупность уравнений равносильны.

2.2.3. Уравнение-следствие. Посторонние корни уравнения. Потеря корней уравнения

Определение 2.5

Если для данной пары уравнений любой корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называют следствием первого.

Если заменить уравнение его следствием, то множество решений второго уравнения будет содержать все корни исходного уравнения и помимо них может содержать еще некоторые числа, называемые посторонними корнями данного уравнения.

Если при выполнении преобразований уравнение $f(x)=g(x)$ свелось к уравнению $f_1(x)=g_1(x)$ (или к совокупности уравнений), некоторые корни которого (которой) не являются корнями уравнения $f(x)=g(x)$, то эти корни уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ называются посторонними корнями уравнения $f(x)=g(x)$.

Например, возводя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x}=-x$, получим уравнение $x=x^2$, имеющее два корня: 0 и 1. Значение $x=0$ удовлетворяет уравнению $\sqrt{x}=-x$, тогда как значение $x=1$ не удовлетворяет уравнению $\sqrt{x}=-x$, т. е. является для него посторонним корнем.

Если при выполнении преобразований уравнение $f(x)=g(x)$ свелось к уравнению $f_1(x)=g_1(x)$ (или к совокупности уравнений), причем некоторые корни уравнения $f(x)=g(x)$ не являются корнями уравнения $f_1(x)=g_1(x)$, то в таких случаях говорят о потере корней.

Например, уравнение $(x-2)^2=x-2$ имеет два корня $x_1=2; x_2=3$. Если обе части этого уравнения разделить на $\varphi(x)=x-2$, то получим уравнение $x-2=1$, которое имеет только один корень: $x=3$. Таким образом, при делении обеих частей уравнения на $\varphi(x)=x-2$ произошла потеря одного корня.

При решении уравнений обычно выполняются различные преобразования, в результате которых заданное уравнение сводится к более простому уравнению (или к совокупности уравнений). При этом важно знать, какие из преобразований приводят к появлению посторонних корней, а какие — к потере корней. Ниже приведены теоремы, следуя которым, после соответствующих преобразований получаются равносильные уравнения.

Теорема 2.1

Если к обеим частям уравнения $f(x)=g(x)$ *прибавить одно и то же выражение* $\varphi(x)$, *которое имеет смысл при всех* x *из области определения уравнения* $f(x)=g(x)$, *то получится уравнение* $f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$, *равносильное данному.*

Теорема 2.2

Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ *умножить или разделить на одно и то же выражение* $\varphi(x)$, *которое имеет смысл при всех значениях* x *из области* *определения данного уравнения и нигде в этой области определения не обращается в нуль, то получится уравнение* $f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ (*или* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{g(x)}{\varphi(x)}$), *равносильное данному.*

Теорема 2.3

Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$, *где* $f(x)\cdot g(x)\ge 0$ *при всех значениях* x *из области определения уравнения, возвести в одну и ту же натуральную степень* n, *то получится уравнение* $(f(x))^n=(g(x))^n$, *равносильное данному.*

Замечание

Если n — нечетное число, то в формулировке теоремы 2.3 можно опустить условие $f(x)\cdot g(x)\ge 0$ при всех x из области определения уравнения.

При решении уравнений приходится также применять преобразования, не оговоренные теоремами 2.1–2.3, т. е. такие преобразования, которые могут привести к появлению посторонних корней или к потере корней. Причиной появления посторонних корней или потери корней могут быть преобразования, выполняемые с помощью формул, изменяющих области определения уравнения.

Таковы, например, формулы, представленные в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Формулы, изменяющие области определения уравнения

1	2	3	4	5	6
$f(x)-f(x)=0$	$\frac{f(x)}{f(x)}=1$	$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{xy}$	$(\sqrt{x})^2=x$	$\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\sin 2x$	$\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
$0=f(x)-f(x)$	$1=\frac{f(x)}{f(x)}$	$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$	$x=(\sqrt{x})^2$	$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}$	$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}$

Различие между формулами, представленными в двух строках таблицы 2.1, состоит в том, что левые части формул первой строки имеют меньшую область определения по сравнению с правой частью той же формулы, а левые части формул второй строки имеют большую область определения по сравнению с правой частью той же формулы. Если в каком-либо уравнении производится замена выражений по формулам первой строки, то при решении уравнения возможно приобретение посторонних корней. Если же в уравнении производится замена выражений по формулам второй строки, то при решении уравнения возможна потеря корней. Например, если какое-либо уравнение имеет своим корнем $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ и в уравнении произведена замена по формуле (6) второй строки, то данный корень уравнения будет потерян, так как правая часть формулы (6) не определена при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

Во всех случаях, когда преобразование, выполненное в процессе решения уравнения, приводит к уравнению, являющемуся следствием первого, но не установлена равносильность полученного уравнения заданному, необходима проверка найденных корней, но применять преобразования, приводящие к потере корней недопустимо, так как проверить потерянные корни невозможно.

Для того чтобы избежать потери корней, необходимо применять преобразования, имеющие одинаковые ОДЗ левой и правой частей уравнения. Например, формулу (3) таблицы 2.1 следует записывать в виде $\sqrt{xy} = \sqrt{|x|} \cdot \sqrt{|y|}$.

Проверка уравнения-следствия является неотъемлемой частью решения уравнения. Решение не может считаться законченным, если не сделана проверка.

Как же проверяются найденные корни? В качестве основных можно указать следующие два способа проверки:

1) путем подстановки каждого из найденных корней в заданное уравнение;

2) путем доказательства равносильности выполняемых преобразований уравнения на всех этапах решения.

2.3. Основные теоретические сведения о неравенствах

Определение 2.6

Областью определения неравенства[2] $f(x) > g(x)$ *называется множество таких значений* x*, при которых и функция* $f(x)$ *и функция* $g(x)$ *определены.*

Иными словами, область определения неравенства $f(x) > g(x)$ — это пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Определение 2.7

Частным решением неравенства $f(x) > g(x)$ *называется всякое удовлетворяющее ему значение переменной* x.

Решением неравенства называется множество всех его частных решений.

Определение 2.8

Два неравенства с одной переменной x *называются равносильными, если их решения совпадают* (*в частности, если оба неравенства не имеют решений*).

Определение 2.9

Если каждое частное решение неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ *является в то же время частным решением неравенства* $f_2(x) > g_2(x)$*, полученного после преобразований неравенства* $f_1(x) > g_1(x)$*, то неравенство* $f_2(x) > g_2(x)$ *называется следствием неравенства* $f_1(x) > g_1(x)$.

Решение неравенств основано на проведении только равносильных преобразований, так как проверить решения неравенств практически невозможно. В следующих теоремах речь идет о преобразованиях, приводящих к равносильным неравенствам.

Теорема 2.4

Если к обеим частям неравенства прибавить одну и ту же функцию $\varphi(x)$*, которая определена при всех значениях* x *из области определения исходного неравенства, и при этом оставить без изменения знак неравенства, то получится неравенство, равносильное исходному.*

Таким образом, неравенства $f(x) > g(x)$ *и* $f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$ *равносильны, если* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию теоремы.*

---

[2] Часто называют областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства.

Теорема 2.5

Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одну и ту же функцию $\varphi(x)$, *которая при всех значениях* x *из области определения исходного неравенства принимает только положительные значения, и при этом оставить без изменения знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное исходному.*

Таким образом, неравенства $f(x) > g(x)$ *и* $f(x)\cdot\varphi(x) > g(x)\cdot\varphi(x)$ (*или* $\frac{f(x)}{\varphi(x)} > \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) *равносильны при* $\varphi(x) > 0$.

Теорема 2.6

Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одну и ту же функцию $\varphi(x)$,*которая при всех значениях* x *из области определения исходного неравенства принимает только отрицательные значения, и при этом изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное исходному.*

Таким образом, неравенства $f(x) > g(x)$ *и* $f(x)\cdot\varphi(x) < g(x)\cdot\varphi(x)$ (*или* $\frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{g(x)}{\varphi(x)}$) *равносильны при* $\varphi(x) < 0$.

Теорема 2.7

Пусть дано неравенство $f(x) > g(x)$, *причем* $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ *при всех* x *из области определения неравенства. Если обе части неравенства возвести в одну и ту же натуральную степень* n *и при этом знак неравенства оставить без изменений, то получится неравенство* $[f(x)]^n > [g(x)]^n$, *равносильное исходному.*

Замечание

Если n — нечетное число, то в формулировке теоремы 2.7 можно опустить условие $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ при всех x из области определения уравнения.

Определение 2.10

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств в том случае, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств.

Из сказанного следует, что решением системы неравенств является *пересечение* решений неравенств, образующих систему.

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют систему, то их записывают в виде $\begin{cases} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$

Если неравенства $f(x) > g_1(x)$ и $f(x) < g_2(x)$ образуют систему, то ее можно записать также в виде двойного неравенства $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$.

Определение 2.11

Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность неравенств в том случае, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из этих неравенств.

Из сказанного следует, что решением совокупности неравенств является *объединение* решений неравенств, образующих совокупность.

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют совокупность неравенств, то их записывают в виде $\left[\begin{array}{l} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x). \end{array}\right.$

Всякое *нестрогое* неравенство $f(x) \geq g(x)$ является совокупностью строгого неравенства $f(x) > g(x)$ и уравнения $f(x) = g(x)$, т. е. $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow$ (равносильно) $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) = g(x). \end{array}\right.$

2.4. Методы решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

При решении уравнений, содержащих переменную величину под знаком модуля, применяются чаще всего следующие методы:

1) применение теорем освобождения от модуля;
2) метод разбиения на числовые промежутки;
3) возведение обеих частей уравнения в квадрат.

2.4.1. Теоремы освобождения от модуля

Теорема 2.8

Уравнение $|f(x)| = g(x)$ *равносильно совокупности двух систем:*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 2.9

Уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ *равносильно совокупности уравнений*

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Пример 3. Решить уравнение $|x+2| = 2(3-x)$.

Решение. На основании теоремы 2.8 запишем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-2x \geq 0 \\ x+2 = 6-2x \end{cases} \\ \begin{cases} 6-2x \geq 0 \\ x+2 = 2x-6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение данной совокупности имеет вид

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6-2x\ge 0\\ x+2=6-2x\end{cases}\\ \begin{cases}6-2x\ge 0\\ x+2=2x-6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 3\\ x=\dfrac{4}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 3\\ x=8\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{3}\\ x\in\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $x=\dfrac{4}{3}$.

2.4.2. Метод разбиения на числовые промежутки

Данный метод целесообразно применять, если использование упомянутых выше теорем затруднительно.

При решении уравнения с модулем, как правило, следует разбить ОДЗ уравнения на промежутки, на которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком промежутке уравнение можно записать без знака модуля и решить.

Решение уравнений по этому методу производится по следующей схеме:

1. Раскрывают по определению 2.1 все модули, входящие в решаемое уравнение.

2. На оси переменной (х) отмечают все точки, при которых выражения, содержащие модули, обращаются в ноль.

3. Записывают выражения, полученные после раскрытия модулей на каждом из полученных промежутков, разделенных отмеченными точками.

4. Для каждого из полученных промежутков составляют систему из соответствующего данному промежутку уравнения и неравенства, определяющего границы промежутка.

5. Решение совокупности полученных систем является решением заданного уравнения.

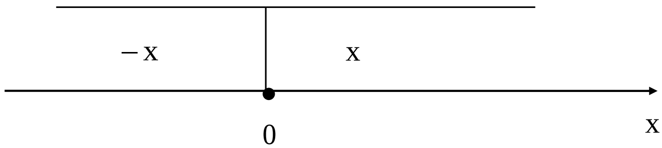
Пример 4. Решить уравнение $x^2-5|x|+6=0$.

Решение.

Шаг 1. По определению

$$|x|=\begin{cases}x, \text{если } x\ge 0,\\ -x, \text{если } x<0.\end{cases}$$

Шаги 2–3. Числовая прямая точкой х = 0 разбивается на 2 промежутка:



Шаг 4. Составляем совокупность из двух систем, состоящих из уравнения и неравенства для каждого из полученных промежутков:

$$1.\ \begin{cases}x<0\\ x^2+5x+6=0.\end{cases} \quad 2.\ \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-5x+6=0.\end{cases}$$

Шаг 5. Решение первой системы имеет вид

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Решение второй системы имеет вид

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Решение заданного уравнения — совокупность решений двух систем, т. е. решением уравнения являются числа $\{-3;-2;2;3\}$.

Ответ: $\{-3;-2;2;3\}$ (Решите этот пример заменой $|x| = t$.)

Пример 5. Решить уравнение $|x| + |5 - x| + 2|x - 3| = 7$.

Решение.

Шаг 1. По определению

$$.|x| = \begin{cases} x, \text{если} \quad x \ge 0, \\ -x, \text{если} \quad x < 0 \end{cases}, \quad |5 - x| = \begin{cases} 5 - x, \text{если} \quad x \le 5, \\ x - 5, \text{если} \quad x > 5 \end{cases}, \quad |x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{если} \quad x \ge 3, \\ 3 - x, \text{если} \quad x < 3. \end{cases}$$

Шаги 2–3. Числовая прямая разбивается точками 0, 3, 5 на четыре промежутка.

$5-x$	$5-x$	$5-x$	$x-5$
$-x$	x	x	x
$3-x$	$3-x$	$x-3$	$x-3$
0	3	5	x

Шаги 4–5. Составляем и решаем совокупность из четырех систем, состоящих из уравнения и неравенства для каждого из полученных промежутков:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ 5 - x - x + 6 - 2x = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 3 \\ 5 - x + x + 6 - 2x = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 \le x < 5 \\ 5 - x + x + 2x - 6 = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 5 \\ x - 5 + x + 2x - 6 = 7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 3 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 \le x < 5 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 5 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x = 2 \\ x = 4 \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2; x = 4$.

2.4.3. Возведение обеих частей уравнения в квадрат

Метод освобождения от модуля в данном случае основан на том, что $|\text{выражение}|^2 =$ (выражение)^2.

Пример 6. Решить уравнение $|x+2| = 2(3-x)$.

Решение. При условии, что $3-x \geq 0$ (теорема 2.3), возведем обе части уравнения в квадрат.

$x^2+4x+4=36-24x+4x^2 \Leftrightarrow 3x^2-28x+32=0$. Решая последнее уравнение, получим $x_1 = 8$; $x_2 = \frac{4}{3}$. Условию $3-x \geq 0$ удовлетворяет только корень $x = \frac{4}{3}$.

Ответ: $x = \frac{4}{3}$.

2.5. Методы решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

При решении неравенств, содержащих переменную величину под знаком модуля, как и в случае решения уравнений, применяются чаще всего следующие методы:

1) применение теорем освобождения от модуля;
2) метод разбиения на числовые промежутки;
3) возведение обеих частей неравенства в квадрат.

2.5.1. Теоремы освобождения от модуля

Теорема 2.10

Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ *равносильно следующей* ***системе*** *неравенств:*

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Решая оба эти неравенства и беря пересечение решений, получим решение исходного неравенства.

Теорема 2.11

Неравенство $|f(x)| \geq g(x)$ *равносильно следующей* ***совокупности*** *неравенств:*

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x). \end{array}\right.$$

Решая оба эти неравенства и беря объединение решений, получим решение исходного неравенства.

Теорема 2.12

Неравенство $|f(x)| \leq |g(x)|$ равносильно следующему неравенству:

$$[f(x)-g(x)]\cdot[f(x)+g(x)] \leq 0.$$

Пример 7. Решить неравенство $|2x-1| < 7-x$.

Решение. Применяя теорему 2.10, получим

$$\begin{cases} 2x - 1 < 7 - x \\ 2x - 1 > x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{8}{3} \\ x > -6. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(-6; \dfrac{8}{3}\right)$.

Пример 8. Решить неравенство $|3x - 2| > 2x + 1$.

Решение. Применяя теорему 2.11, получим

$$\left[\begin{array}{l} 3x - 2 > 2x + 1 \\ 3x - 2 < -2x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < \dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{5}\right) \cup (3; \infty)$.

2.5.2. Метод разбиения на числовые промежутки

Данный метод целесообразно применять, если использование упомянутых выше теорем затруднительно. Метод решения аналогичен изложенному в п. 2.4.2.

Решение неравенства по этому методу производится по следующей схеме:

1. Раскрывают по определению 2.1 все модули, входящие в решаемое неравенство.

2. На оси переменной (x) отмечают все точки, при которых выражения, содержащие модули, обращаются в ноль.

3. Записывают выражения, полученные после раскрытия модулей на каждом из полученных промежутков, разделенных отмеченными точками.

4. Для каждого из полученных промежутков составляют систему из соответствующего данному промежутку неравенства и неравенства, определяющего границы промежутка.

5. Решение совокупности полученных систем является решением заданного неравенства.

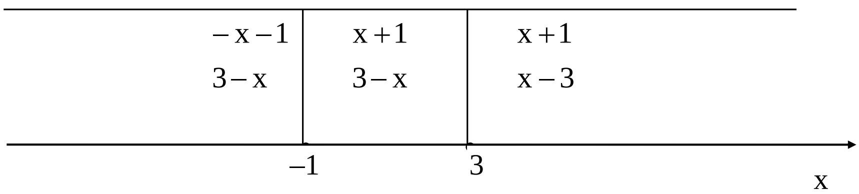
Пример 9. Решить неравенство $2|x - 3| + |x + 1| \le 3x + 1$.

Решение.

Шаг 1. Раскрываем входящие в неравенство модули:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{если } x \ge 3, \\ 3 - x, \text{если } x < 3. \end{cases} \quad |x + 1| = \begin{cases} x + 1, \text{если } x \ge -1, \\ -x - 1, \text{если } x < -1. \end{cases}$$

Шаги 2–3. Числовая прямая разбивается точками –1; 3 на три промежутка.



Шаги 4–5. Составляем и решаем совокупность из трех систем, состоящих из неравенств для каждого из полученных промежутков.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ 6-2x-x-1\le 3x+1\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<3\\ 6-2x+x+1\le 3x+1\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3\\ 2x-6+x+1\le 3x+1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ x\ge \frac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<3\\ x\ge \frac{3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3\\ -6\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ x\in\left(\frac{3}{2};3\right)\\ x\in[3;\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{2};\infty\right).$$

Ответ: $x\in\left(\frac{3}{2};\infty\right)$.

2.5.3. Возведение обеих частей неравенства в квадрат

Пример 10. Решить неравенство $|3x-2|>2x+1$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности из двух систем (теорема 2.7):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3x-2)^2>(2x+1)^2\\ 2x+1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in R\\ 2x+1<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решая данную совокупность, получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3x-2)^2>(2x+1)^2\\ 2x+1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in R\\ 2x+1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}9x^2-12x+4>4x^2+4x+1\\ 2x+1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in R\\ 2x+1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x^2-16x+3>0\\ 2x+1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\in R\\ 2x+1<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(3;\infty)\\ x\ge -\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x\in R\\ x<-\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{5}\right)\cup(3;\infty)\\ x<-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(3;\infty).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup (3; \infty)$.

В данном случае применение теоремы 2.8 предпочтительней и быстрее приводит к ответу (пример 8).

2.6. Анализ областей на плоскости, ограниченных прямыми

Метод разбиения на промежутки используется в задачах, связанных с анализом областей на плоскости, ограниченных прямыми.

Пример 11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 7; y = |x-2| + |x+3|.$$

Решение.

Шаг 1. Раскрываем входящие в неравенство модули:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, \text{если } x \ge -3, \\ -x-3, \text{если } x < -3. \end{cases} \quad |x-2| = \begin{cases} x-2, \text{если } x \ge 2, \\ -x+2, \text{если } x < 2. \end{cases}$$

Шаг 2. Числовая прямая разбивается точками –3; 2 на три промежутка.

$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$-x+2$	$-x+2$	$x-2$

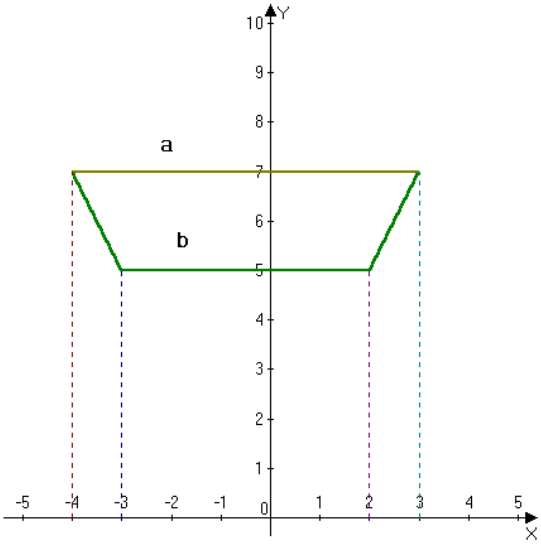
–3 2 x

Шаг 3. Для каждого из трех промежутков записываем выражения для функции

$$y = |x-2| + |x+3|.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3 \\ y = -x-3-x+2 = -2x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 \le x < 2 \\ y = x+3-x+2 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2 \\ y = x+3+x-2 = 2x+1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Шаг 4. На каждом из промежутков строим графики записанных выше функций и график $y = 7$. В результате получим область, ограниченную четырьмя прямыми линиями, которая является трапецией со сторонами a и b.



Шаг 5. Длина стороны a равна 7, a длина стороны b равна 5. Высота h трапеции равна 2. Площадь трапеции равна $S = \dfrac{a+b}{2}h = 12$ кв. ед.

Ответ: $S = 12$ кв. ед.

ГЛАВА 3
ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

3.1. Общие сведения о многочленах

Определение 3.1

Многочленом n-й степени стандартного (*канонического*) *вида* называется функция $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$.

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называют *коэффициентами* этого многочлена, n — *степень многочлена.* Область определения многочлена — вся числовая прямая. В частности, многочлен первой степени $y = P_1(x) = a_0 + a_1x$ называют *линейной* функцией, а многочлен второй степени называют *квадратичной* функцией. Многочленом n-й степени называется функция, которая определена на всей числовой прямой и может быть приведена к многочлену n-й степени стандартного вида. Например: функция $f(x) = 1 - x^3 + (x^4 - 5)(x - 2)$ определена на всей числовой прямой и может быть приведена к виду $f(x) = 11 - 5x - x^3 - 2x^4 + x^5$. Функция $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}$ на области определения совпадает с многочленом $y = x - 2$. Однако функция f(x) не является многочленом, так как она не определена в точке $x = -2$.

Число a называется нулем функции y = P(x) или корнем многочлена P(x), если P(a) = 0.

Функцию вида $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называют *рациональной*. Областью определения рациональной функции является вся числовая прямая за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль.

3.1.1. Сложение и умножение многочленов

Пусть $A(x) = a_mx^m + \ldots + a_1x + a_0, B(x) = b_nx^n + \ldots + b_1x + b_0$, (будем считать без ограничения общности $m \geq n$).

Тогда определены соответственно сумма и произведение многочленов $A(x) + B(x) = (a_m + b_m)x^m + \ldots + (a_0 + b_0)$, где $b_s = 0$ при $s > n$. $A(x)B(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_ib_jx^{i+j}$.

3.1.2. Деление многочленов

В отличие от операций сложения и умножения многочленов операция деления многочлена на многочлен выполнима не всегда. Иными словами, если заданы многочлены A(x) и B(x), то не всегда найдется такой многочлен Q(x), что A(x) = Q(x)B(x).

Например, многочлен $x^3 + 3$ не делится на многочлен $x-3$. Предположим иное, т. е. существует многочлен Q(x), $x^3 + 3 = (x-3)Q(x)$. Тогда при замене x любым числом должно получиться верное равенство. Но при x = 3 получаем: $3^3 + 3 = (3-3)Q(x)$, т. е. 30 = 0 — неверное равенство.

Для многочленов определяется операция деления с остатком: пусть A(x) и B(x) — многочлены с действительными коэффициентами, причем B(x) — не нулевой многочлен. Тогда при делении $A(x)$ на $B(x)$ существуют такие многочлены Q(x) — *частное* и R(x) — *остаток,* что

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x),$$

причем степень многочлена — остатка R(x) меньше степени B(x).

1. Метод неопределенных коэффициентов

При выполнении деления с остатком многочлена на многочлен часто бывает удобно применять метод неопределенных коэффициентов. Метод неопределенных коэффициентов заключается в том, что, когда известен вид искомых многочленов, но неизвестны их коэффициенты, в исследуемом тождестве $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ заменяют эти многочлены их записью с неопределенными коэффициентами. Далее приводят обе части равенства к стандартному виду, после чего приравнивают слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Это дает систему уравнений, позволяющую найти коэффициенты.

Разделим с остатком многочлен $A(x) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x - 1$ на многочлен $B(x) = x^2 + x + 1$. Необходимо найти такие многочлены Q(x) и R(x), что $A(x) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x - 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + R(x)$. Причем, степень R(x) меньше степени B(x), т. е. меньше 2. Из того, что степень многочлена-произведения равна сумме степеней многочленов-сомножителей, следует, что степень Q(x) равна: $5 - 2 = 3$. То есть, хотя мы не знаем многочленов Q(x) и R(x), нам известны их степени. Но многочлены третьей и первой степеней имеют вид

$$Q(x) = q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0 \text{ и } R(x) = r_1x + r_0.$$

Подставляя эти выражения вместо Q(x) и R(x), получаем

$$3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x - 1 = (x^2 + x + 1)(q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0) + (r_1x + r_0).$$

Если в правой части этого равенства раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим

$$3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x - 1 =$$

$$= q_3x^5 + (q_2 + q_3)x^4 + (q_3 + q_2 + q_1)x^3 + (q_0 + q_1 + q_2)x^2 + (q_0 + q_1 + r_1)x + (q_0 + r_0).$$

Это равенство должно выполняться для всех значений переменной. Но если два многочлена тождественно равны, то их коэффициенты при одинаковых показателях степеней совпадают. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} q_3 = 3 \\ q_2 + q_3 = 2 \\ q_3 + q_2 + q_1 = -3 \\ q_0 + q_1 + q_2 = 6 \\ q_0 + q_1 + r_1 = -1 \\ q_0 + r_0 = -1 \end{cases} \text{Откуда} \Leftrightarrow \begin{cases} q_3 = 3 \\ q_2 = -1 \\ q_1 = -5 \\ q_0 = 12 \\ r_1 = -8 \\ r_0 = -13. \end{cases}$$

Следовательно $Q(x) = 3x^3 - x^2 - 5x + 12;\ R(x) = -8x - 13$.

2. Деление «углом»

Вместо выписывания системы уравнений применяют запись деления «углом», аналогичную записи при делении чисел. Тот же пример решается следующим образом:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - x - 1 & x^2 + x + 1 \\ \underline{3x^5 + 3x^4 + 3x^3 \qquad\qquad\qquad} & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ -x^4 - 6x^3 + 6x^2 - x - 1 & 3x^3 - x^2 - 5x + 12 \\ \underline{-x^4 - x^3 - x^2 \qquad\quad} & \\ -5x^3 + 7x^2 - x - 1 & \\ \underline{-5x^3 - 5x^2 - 5x \quad} & \\ 12x^2 + 4x - 1 & \\ \underline{12x^2 + 12x + 12} & \\ -8x - 13 & \end{array}$$

3.2. Разложение многочленов на множители. Тождественные преобразования рациональных выражений

Важнейшим элементом при проведении тождественных преобразований является разложение многочлена на множители.

Определение 3.2

Замена аналитического выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называется тождественным преобразованием данного выражения на этом множестве.

Определение 3.3

Представление многочлена в виде произведения двух или большего числа многочленов называется разложением многочлена на множители.

Далее рассмотрим основные приемы разложения многочленов на множители.

3.2.1. Использование корней многочлена

Теорема 3.1 (Теорема Безу)

Примем без доказательства три следующих утверждения, которые могут помочь в отыскании корней многочленов и в разложении на множители.

1. Остаток от деления многочлена $P(x)$ *на двучлен* $x-x_0$ *равен* $P(x_0)$.

2. Если число x_0 *является корнем многочлена* $P(x)$, *то этот многочлен делится на* $x-x_0$ *без остатка.*

3. Если многочлен имеет корни $x_1, x_2, ..., x_n$, *то он делится без остатка на произведение* $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$.

Следствие 1: *Многочлен степени* n *имеет не более* n *корней.*

Следствие 2: $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$.

В частности для квадратного трехчлена получим

$$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_2(x-x_1)(x-x_2) \qquad (3.1)}$$

Пример 1. Разложить на множители $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$.

Решение. Для нахождения корней многочлена $f(x)$ степени выше второй иногда бывает полезным знать следующий факт:

Если $x = k$ — целый корень многочлена с целыми коэффициентами, то число $x = k$ является делителем свободного члена $a_0 = f(0)$ *).

Попытаемся отыскать корни данного многочлена третьей степени среди делителей его свободного члена $f(0) = 6$, которыми являются числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $f(-2) = -16 + 36 - 14 - 6 = 0$, поэтому $x = -2$ — корень данного многочлена. Далее, согласно утверждению 2 теоремы Безу, имеем $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = (x+2)g(x)$. Многочлен $g(x)$ можно найти способом деления «углом».

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 & x + 2 \\
\underline{2x^3 + 4x^2} \quad\quad\quad\; & \overline{2x^2 + 5x - 3} \\
5x^2 + 7x \quad\;\; & \\
\underline{5x^2 + 10x} \quad\;\; & \\
-3x - 6 & \\
\underline{-3x - 6} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом, $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$, и поэтому

$$2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = (x+2)(2x^2 + 5x - 3).$$

Корнями квадратного трехчлена $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$ являются корни квадратного уравнения $2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3; x_2 = \frac{1}{2}$.

Следовательно, согласно формуле (3.1), имеем

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x+3)(2x-1).$$

*) Более общий результат приведен в п. 5.1.1 главы 5.

Итак, для данного кубического многочлена искомое разложение на множители имеет вид

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = (x+2)(x+3)(2x-1).$$

Ответ: $(x+2)(x+3)(2x-1)$.

3.2.2. Применение формул сокращенного умножения

При тождественных преобразованиях используются следующие формулы сокращенного умножения.

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$;
6. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;
7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$;
8. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Пример 2. Упростить выражение $\dfrac{(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}$.

Решение. Разложим сначала на множители выражение, стоящее в знаменателе дроби. Очевидно, что разложение для числителя дроби будет аналогичным, с той лишь разницей, что у каждой буквенной переменной будет стоять квадрат.

Сгруппируем сумму из первого и третьего слагаемого. Тогда получим $\left[(a-b)^3 + (c-a)^3\right] + (b-c)^3$. Первые два слагаемых представим в виде произведения по формуле 6.

$$\left[(a-b)^3 + (c-a)^3\right] + (b-c)^3 = (c-b)\left[(a-b)^2 - (a-b)(c-a) + (c-a)^2\right] + (b-c)^3.$$

Выносим за скобки $(c-b)$, тогда имеем

$$(c-b)\left[(a-b)^2 - (a-b)(c-a) + (c-a)^2 - (b-c)^2\right].$$

Раскрывая выражение в квадратных скобках, получим

$$(c-b)\left[a^2 - 2ab + b^2 - ac + bc + a^2 - ab + c^2 - 2ac + a^2 - b^2 + 2bc - c^2\right] =$$
$$= (c-b)(3a^2 - 3ab - 3ac + 3bc) = 3(c-b)\left[a(a-c) - b(a-c)\right] = 3(c-b)(a-c)(a-b).$$

Числитель заданного выражения раскладывается на множители в виде

$$(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3 = 3(c^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2).$$

Тогда

$$\frac{(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3} = \frac{3(c-b)(c+b)(a-c)(a+c)(a-b)(a+b)}{3(c-b)(a-c)(a-b)} =$$
$$= (b+c)(a+c)(a+b).$$

Ответ: $(b+c)(a+c)(a+b)$, если a, b и c попарно не равны между собой ($a \neq b; b \neq c; a \neq c$).

3.2.3. Выделение полного квадрата

Покажем прием выделения полного квадрата на примере квадратного трехчлена

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\cdot x\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Этот прием бывает полезным при разложении многочленов на множители.

Пример 3. Разложить на множители x^4+x^2+1.

Решение.

$$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right).$$

Квадратные трехчлены, стоящие в каждой из полученных скобок, не разлагаются далее на линейные множители по формуле 3.1, так как отрицательны дискриминанты соответствующих квадратных уравнений.

Ответ: $\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right)$.

Пример 4. Разложить на множители $f(a,b)=2a^2+ab-b^2$.

Решение.

Способ 1.

$$f(a,b)=2a^2+ab-b^2=2\left[a^2+2a\frac{b}{4}-\frac{1}{2}b^2\right]=2(a^2+2a\frac{b}{4}+\frac{b^2}{16}-\frac{b^2}{16}-\frac{b^2}{2})=$$

$$=2\left(a+\frac{b}{4}\right)^2-\frac{9b^2}{8}=\left[\sqrt{2}\left(a+\frac{b}{4}\right)-\frac{3b}{2\sqrt{2}}\right]\left[\sqrt{2}\left(a+\frac{b}{4}\right)+\frac{3b}{2\sqrt{2}}\right]=$$

$$=\left[\sqrt{2}\left(a+\frac{b}{4}\right)-\frac{3\sqrt{2}b}{4}\right]\left[\sqrt{2}\left(a+\frac{b}{4}\right)+\frac{3\sqrt{2}b}{4}\right]=\left[\sqrt{2}\left(a+\frac{b}{4}-\frac{3b}{4}\right)\right]\left[\sqrt{2}\left(a+\frac{b}{4}+\frac{3b}{4}\right)\right]=$$

$$=2\left(a-\frac{b}{2}\right)\left(a+b\right)=(2a-b)(a+b).$$

Способ 2.

$$f(a,b)=2a^2+ab-b^2=-\left[b^2-2b\frac{a}{2}-2a^2\right]=-\left[b^2-2b\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}-2a^2\right]=$$

$$=-\left[b-\frac{a}{2}\right]^2+\frac{9a^2}{4}=\left(\frac{3a}{2}-b+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{3a}{2}+b-\frac{a}{2}\right)=(2a-b)(a+b).$$

Способ 3.

$f(a,b)=2a^2+ab-b^2$. Пусть в данном выражении $b=x$. Тогда имеем $-x^2+ax+2a^2$. В соответствии с формулой 3.1 можно считать, что $a_2=-1; a_1=a; a_0=2a^2$. Находим x_1, x_2 как корни квадратного уравнения $-x^2+ax+2a^2=0$.

$$x_1 = b = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8a^2}}{-2} = -a$$

$$x_2 = b = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 8a^2}}{-2} = 2a.$$

В соответствии с формулой 3.1 получим

$$-x^2 + ax + 2a^2 = -(b+a)(b-2a) = (a+b)(2a-b).$$

Способ 4. (Способ группировки)

$$f(a,b) = 2a^2 + ab - b^2 = a^2 + a^2 + 2ab - 2ab + ab + b^2 - 2b^2 =$$

$$= (a+b)^2 + a^2 - 2ab - 2b^2 + ab = (a+b)^2 + a(a+b) - 2b(a+b) =$$

$$= (a+b)\big(a+b+a-2b\big) = (a+b)(2a-b).$$

Ответ : $(a+b)(2a-b)$.

3.2.4. Замена переменной

Иногда при разложении на множители появляется возможность обнаружить или сформировать некоторый «общий» элемент в выражении. Тогда удобно произвести замену этого элемента на новую переменную.

Пример 5. Разложить на множители $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

Решение. Сгруппируем и перемножим первый с четвертым и второй с третьим сомножителем. Тогда получим

$$\left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+15\right)+15 = \left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+7+8\right)+15.$$

В выражении появился «общий» элемент x^2+8x+7, который обозначим за t.

Тогда $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 = t(t+8)+15 = t^2+8t+15.$

Раскладывая последнее выражение на множители по формуле 3.1, получим $t^2+8t+15=(t+3)(t+5)$. Производя обратную замену, запишем $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 = \left(x^2+8x+10\right)\left(x^2+8x+12\right)$.

Раскладывая выражения в каждой скобке на множители по формуле 3.1, получим окончательный результат:

$$\left(x^2+8x+10\right)\left(x^2+8x+12\right) = (x+2)(x+6)(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6}).$$

Ответ: $(x+2)(x+6)(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6})$.

3.2.5. Упрощение выражений, содержащих знак модуля

Упрощение выражений, содержащих знак модуля, производится по правилам, изложенным в главе 2, где описаны методы решения уравнений и неравенств с модулями.

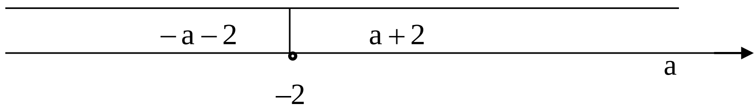
Пример 6. Упростить выражение $\dfrac{a^3+a^2-2a}{a|a+2|-a^2+4}$.

Решение.

Шаг 1. Раскроем входящий в выражение модуль

$$|a+2| = \begin{cases} a+2, \text{если } a \ge -2, \\ -a-2, \text{если } a < -2. \end{cases}$$

Шаг 2. Точка –2 разбивает числовую ось а на два промежутка



Шаг 3. На промежутке $a<-2$ выражение примет вид

$$\begin{cases} a<-2 \\ \dfrac{a^3+a^2-2a}{a(-a-2)-a^2+4}=\dfrac{a^3+a^2-2a}{-2a^2-2a+4}=\dfrac{a\left(a^2+a-2\right)}{-2\left(a^2+a-2\right)}. \end{cases}$$

Выражение, стоящее в знаменателе дроби, не должно обращаться в ноль. Тогда $a^2+a-2\neq 0$ или $a\neq 1; a\neq -2.$

Получим

$$\begin{cases} a<-2 \\ \dfrac{a\left(a^2+a-2\right)}{-2\left(a^2+a-2\right)} \\ a\neq 1; a\neq -2. \end{cases}$$

Очевидно, что на промежутке $a<-2$ выражение $a^2+a-2\neq 0$ и на него можно сократить дробь. Тогда $\begin{cases} a<-2 \\ -\dfrac{a}{2}. \end{cases}$

На промежутке $a\geq -2$ выражение примет вид

$$\begin{cases} a\geq -2 \\ \dfrac{a\left(a^2+a-2)\right)}{a^2+2a-a^2+4}=\dfrac{a(a^2+a-2)}{2(a+2)} \\ a\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-2 \\ \dfrac{a(a+2)(a-1)}{2(a+2)}=\dfrac{a(a-1)}{2}. \end{cases}$$

В итоге получим

Ответ: $\begin{cases} -\dfrac{a}{2}, \text{если } a<-2 \\ \dfrac{a(a-1)}{2}, \text{если } a>-2. \end{cases}$

3.3. Корень n-й степени. Арифметический корень. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Определение 3.4

Алгебраическое выражение, содержащее операции извлечения корня из переменной или возведения переменной в рациональную степень, не являющуюся целым числом, называется иррациональным относительно этой переменной.

Определение 3.5

Корнем n*-й степени* $(n \in N; n \neq 1)$ *из числа* a *называется такое число* x*,* n*-я степень которого равна* a.

Итак, $\sqrt[n]{a} = x$, так как $x^n = a$.

Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$, так как $(-2)^3 = -8$.

Такое определение корня при четных n приводит к его неоднозначному вычислению. Например, $\sqrt{4} = \pm 2$, так как $(\pm 2)^2 = 4$. Чтобы избежать неоднозначности, при преобразованиях выражений вводят и оперируют понятием арифметического корня.

Определение 3.6

Арифметическим корнем n*-й степени* $(n \in N; n \neq 1)$ *из числа* a *называется неотрицательное число* x*,* n*-я степень которого равна* a.

Тогда $\sqrt{4} = 2$ — арифметический корень.

Из определения 3.5 следует, если n — нечетное число, $n \neq 1, a < 0$, то под $\sqrt[n]{a}$ надо понимать такое отрицательное число x, что $x^n = a$.

Из определений (3.5) и (3.6) получим, что

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{если } n \text{ — четное число,} \\ a, \text{ если } n \text{ — нечетное число, } n \neq 1. \end{cases}$$

Например, $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt[3]{x^3} = x$.

С корнем n-й степени тесно связано понятие рациональной степени действительного числа. Отметим сразу, что рациональная степень числа определяется лишь для положительных оснований (исключая случай целого показателя корня).

Определение 3.7

Следующие равенства являются определением рациональной степени действительного числа:

1.

1	$a^0 = 1, a \neq 0$
2	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in N$
3	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ — иррациональное выражение, $a \geq 0, m, n \in N, \dfrac{m}{n} \notin N$
4	$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ — иррациональное выражение, $a > 0, m, n \in N, \dfrac{m}{n} \notin N$

Рациональная степень числа подчиняется обычным свойствам степеней:

1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3	$(a^m)^n = a^{mn}$

4	$(ab)^n = a^{n} \cdot b^n$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6	$(\lvert a\rvert)^m = \lvert a^m\rvert$

Здесь m, n — рациональные числа, a и b — действительные числа, причем $a > 0, b > 0$.

Приведем также некоторые основные действия над корнями четной степени:

1	$\sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b} = \sqrt[2n]{ab}, a \ge 0, b \ge 0$
2	$\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{\lvert a\rvert} \cdot \sqrt[2n]{\lvert b\rvert}, a \cdot b \ge 0$
3	$\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}} = \sqrt[2n]{\frac{a}{b}},\ a \ge 0, b > 0$
4	$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[2n]{\lvert b\rvert}}, a \cdot b \ge 0, b \ne 0$

Рассмотрим основные приемы упрощений иррациональных выражений.

3.3.1. Формула вычисления сложного радикала

При проведении упрощений иногда удобно применять формулу для вычисления сложного радикала.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Данную формулу имеет смысл применять, если выражение $A^2 - B$ — полный квадрат.

Пример 1. Проверить равенство $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = 1.$

Решение. Запишем левую часть равенства в виде

$$\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{10 - \sqrt{96}} + \sqrt{15 - \sqrt{216}}.$$

Тогда получим

$$\sqrt{10 - \sqrt{96}} = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{100 - 96}}{2}} - \sqrt{\frac{10 - \sqrt{100 - 96}}{2}} = \sqrt{6} - 2,$$

$$\sqrt{15 - \sqrt{216}} = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{225 - 216}}{2}} - \sqrt{\frac{15 - \sqrt{225 - 216}}{2}} = 3 - \sqrt{6}.$$

Следовательно, $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} + \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 2 + 3 - \sqrt{6} = 1.$

Тождество доказано, так как левая часть равняется правой части.

Пример 2. Упростить выражение $\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}\left(\left(\sqrt{1 + x}\right)^3 - \left(\sqrt{1 - x}\right)^3\right)}{2 + \sqrt{1 - x^2}}.$

Решение. ОДЗ данного выражения

$$\begin{cases}1+x\ge 0\\ 1-x^2\ge 0\\ 1-x\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x^2\le 1\\ x\le 1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ |x|\le 1\\ x\le 1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ -1\le x\le 1\\ x\le 1.\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le 1.$$

1) Сначала упростим выражение $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$, для чего воспользуемся формулой вычисления сложного радикала.

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{x^2}}{2}}+\sqrt{\frac{1-\sqrt{x^2}}{2}}=\sqrt{\frac{1+|x|}{2}}+\sqrt{\frac{1-|x|}{2}}.$$

Очевидно, что при $-1\le x\le 1$

$$\sqrt{\frac{1+|x|}{2}}+\sqrt{\frac{1-|x|}{2}}=\sqrt{\frac{1+x}{2}}+\sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

2) Выражение в круглых скобках числителя — разность кубов

$$\left(\sqrt{1+x}\right)^3-\left(\sqrt{1-x}\right)^3=\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{1-x^2}\right).$$

3) $$\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\left(\sqrt{(1+x)}\right)^3-\left(\sqrt{1-x}\right)^3\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}=\left[\sqrt{\frac{1+x}{2}}+\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right]\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right).$$

Упрощая последнее выражение с учетом ОДЗ, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(1+x)^2}-\sqrt{(1-x)^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1+x|-|1-x|\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+x-1+x\right)=\sqrt{2}x.$$

Ответ: $\sqrt{2}x$, при $-1\le x\le 1$.

3.3.2. Использование формул сокращенного умножения

Формулы сокращенного умножения, приведенные в разделе 3.2.2, также применяются при упрощении иррациональных выражений.

Пример 3. Вычислить сумму А = $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Решение. Пусть $a=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}; b=\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$. Тогда А = a + b.

Возведем обе части последнего выражения в куб, тогда $A^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=a^3+b^3+3abA$.

Подставляя вместо a и b радикалы, получим уравнение относительно А.

$$A^3=\left(20+\sqrt{392}\right)+\left(20-\sqrt{392}\right)+3\sqrt[3]{\left(20+\sqrt{392}\right)\left(20-\sqrt{392}\right)}A \text{ или}$$

$$A^3=40+3\sqrt[3]{400-392}A=40+6A\Leftrightarrow A^3-6A-40=0.$$

Левая часть уравнения раскладывается на множители. Применим метод использования корней многочлена (п. 3.2.1).

Путем подбора делителей свободного члена находим, что корнем многочлена является А = 4, т. е. $A^3-6A-40=(A-4)Q(x)=0$.

Делением «углом» находим Q(x). $Q(x)=A^2+4A+10$. Заметим, что $Q(x)\ne 0$.

Тогда имеется только один корень А = 4.

Ответ: $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=4$.

3.3.3. Замена переменных

Данный метод основан на нахождении таких новых переменных, при которых иррациональное выражение становится рациональным. Необходимо быть очень осторожным с анализом области допустимых значений выражения.

Пример 4. Упростить выражение

$$\left[\frac{\sqrt{a^3b^{-3}}-\sqrt{b^3a^{-3}}}{\frac{a^2+b^2}{ab}+1}\right]\frac{(a-b)^{-1}}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Решение.

ОДЗ данного выражения являются все значения переменных a и b, при которых $ab>0$ и $a\neq b$.

Представим заданное выражение с переменными a и b без отрицательных показателей степеней с учетом действий 2 и 4, представленных на стр. 47 с корнями чётной степени.

$$\left[\frac{\sqrt{a^3b^{-3}}-\sqrt{b^3a^{-3}}}{\frac{a^2+b^2}{ab}+1}\right]\frac{(a-b)^{-1}}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}=\left[\frac{\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}-\sqrt{\frac{b^3}{a^3}}}{\frac{a^2+b^2}{ab}+1}\right]\frac{(ab)^{\frac{1}{2}}}{(a-b)}=\left[\frac{\frac{\sqrt{|a|^3}}{\sqrt{|b^3|}}-\frac{\sqrt{|b|^3}}{\sqrt{|a|^3}}}{\frac{a^2+b^2}{ab}+1}\right]\frac{\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}{(a-b)}=$$

$$=\frac{\frac{|a|^{\frac{3}{2}}}{|b|^{\frac{3}{2}}}-\frac{|b|^{\frac{3}{2}}}{|a|^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2+b^2}{ab}+1}\cdot\frac{|a|^{\frac{1}{2}}|b|^{\frac{1}{2}}}{(a-b)}.$$

Далее будем производить упрощение по следующей схеме:

Шаг 1.

Выпишем отдельно значения переменных с различными показателями степеней.

$$|a|^{\frac{3}{2}},|a|^{\frac{1}{2}},a^1,a^2;$$

$$|b|^{\frac{3}{2}},|b|^{\frac{1}{2}},b^1,b^2.$$

Определяем наименьшее общее кратное знаменателей дробей в показателе степени при каждой из переменных выражения.

При переменной a — $НОК_1 = 2$, при переменной b — $НОК_2 = 2$.

Рассмотрим два случая.

1. $a>0, b>0$.

Шаг 2. Сделаем следующую замену переменных:

$$a=m^{НОК_1}=m^2,$$

$$b=n^{НОК_2}=n^2.$$

При этом считаем, что $m>0, n>0$.

Тогда $|a|^{\frac{3}{2}}=m^3, |a|^{\frac{1}{2}}=m, a^1=m^2, a^2=m^4$ и соответственно

$$|b|^{\frac{3}{2}}=n^3, |b|^{\frac{1}{2}}=n, b^1=n^2, b^2=n^4.$$

Шаг 3. Производя замену переменной, запишем

$$\frac{\dfrac{|a|^{\frac{3}{2}}}{|b|^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{|b|^{\frac{3}{2}}}{|a|^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{a^2+b^2}{ab}+1}\cdot\frac{|a|^{\frac{1}{2}}|b|^{\frac{1}{2}}}{(a-b)} = \frac{\dfrac{m^3}{n^3}-\dfrac{n^3}{m^3}}{\dfrac{m^4+n^4}{m^2n^2}+1}\cdot\frac{mn}{m^2-n^2}.$$

В результате получили рациональное выражение, последовательное упрощение которого дает следующий результат:

$$\frac{\dfrac{m^3}{n^3}-\dfrac{n^3}{m^3}}{\dfrac{m^4+n^4}{m^2n^2}+1}\cdot\frac{mn}{m^2-n^2} = \frac{\left(m^6-n^6\right)}{(m^4+m^2n^2+n^4)}\cdot\frac{m^3n^3}{(m^2-n^2)\cdot m^3n^3}=\frac{\left(m^6-n^6\right)}{(m^6-n^6)}=1.$$

2. $a<0, b<0$.

Шаг 4. Сделаем следующую замену переменных:

$$a=-m^{\text{нок}_1}=-m^2,$$

$$b=-n^{\text{нок}_2}=-n^2.$$

При этом также считаем, что $m>0, n>0$.

Тогда $|a|^{\frac{3}{2}}=m^3, |a|^{\frac{1}{2}}=m, a^1=-m^2, a^2=m^4$ и соответственно

$$|b|^{\frac{3}{2}}=n^3, |b|^{\frac{1}{2}}=n, b^1=-n^2, b^2=n^4.$$

Шаг 5. Производя замену переменной, получим

$$\frac{\dfrac{|a|^{\frac{3}{2}}}{|b|^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{|b|^{\frac{3}{2}}}{|a|^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{a^2+b^2}{ab}+1}\cdot\frac{|a|^{\frac{1}{2}}|b|^{\frac{1}{2}}}{(a-b)} = \frac{\dfrac{m^3}{n^3}-\dfrac{n^3}{m^3}}{\dfrac{m^4+n^4}{m^2n^2}+1}\cdot\frac{mn}{(n^2-m^2)}.$$

В результате получили рациональное выражение, последовательное упрощение которого дает следующий результат

$$\frac{\dfrac{m^3}{n^3}-\dfrac{n^3}{m^3}}{\dfrac{m^4+n^4}{m^2n^2}+1}\cdot\frac{mn}{(n^2-m^2)}=$$

$$=\frac{\left(m^6-n^6\right)}{(m^4+m^2n^2+n^4)}\cdot\frac{m^3n^3}{(n^2-m^2)\cdot m^3n^3}=\frac{\left(m^6-n^6\right)}{(n^6-m^6)}=-1$$

Ответ: 1, если $a>0, b>0$, $a\neq b$, -1, если $a<0, b<0, a\neq b$.

Пример 5. Упростить выражение $\left[\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-b}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}-3\sqrt[12]{a^3b^4}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{b^2}\right], b>0.$

Решение. ОДЗ данного выражения $a\ge 0, b>0, \sqrt[4]{a}\ne\sqrt[3]{b}.$

Запишем исходное выражение в виде

$$\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}-b}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{3}}}-3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}+b}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{3}}}-b^{\frac{2}{3}}\right], b>0.$$

Шаг 1.

Выпишем отдельно значения переменных с различными показателями степеней.

$$a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{1}{4}};$$

$$b^{\frac{1}{3}}, b^{\frac{2}{3}}, b^1.$$

Определяем наименьшее общее кратное знаменателей дробей в показателе степени при каждой из переменных выражения.

При переменной a — $НОК_1 = 4$, при переменной b — $НОК_2 = 3$.

Шаг 2. Сделаем следующую замену переменных:

$$a=m^{нок_1}=m^4,$$

$$b=n^{нок_2}=n^3, n>0.$$

При этом будем считать, что $m\ge 0.$ Тогда

$$a^{\frac{3}{4}}=m^3, a^{\frac{1}{4}}=m,$$

$$b^{\frac{1}{3}}=n, b^{\frac{2}{3}}=n^2, b^1=n^3.$$

Шаг 3. Производя замену переменной, получим

$$\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}-b}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{3}}}-3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}+b}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{3}}}-b^{\frac{2}{3}}\right]=\left[\frac{m^3-n^3}{m-n}-3mn\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{m^3+n^3}{m+n}-n^2\right].$$

В результате в скобках получили рациональные выражения, последовательное упрощение которых дает следующий результат:

$$\left[\frac{m^3-n^3}{m-n}-3mn\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{m^3+n^3}{m+n}-n^2\right]=\left(m^2-2mn+n^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(m^2-mn\right)=$$

$$=\left[(m-n)^2\right]^{-\frac{1}{2}}m(m-n)=\frac{m(m-n)}{|m-n|}.$$

(Напомним, что $\sqrt{x^2}=\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}=|x|.$)

Шаг 4. Упрощаем выражение, содержащее модуль.

$$|m-n|=\begin{cases} m-n, \text{ если } m>n \\ n-m, \text{ если } m<n. \end{cases}$$

Тогда при $m>n$ $\dfrac{m(m-n)}{m-n}=m$, а при $m<n$ $\dfrac{m(m-n)}{n\text{-}m}=-m.$

Шаг 5. Возвращаясь к старым обозначениям, получаем окончательно

$$\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}-b}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{3}}}-3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}+b}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{3}}}-b^{\frac{2}{3}}\right]=\sqrt[4]{a}\text{ , если } \sqrt[4]{a}>\sqrt[3]{b}\,.$$

$$\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}-b}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{3}}}-3a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}+b}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{3}}}-b^{\frac{2}{3}}\right]=-\sqrt[4]{a}\text{ , если } \sqrt[4]{a}<\sqrt[3]{b}\,.$$

Ответ: $\sqrt[4]{a}$, если $\sqrt[4]{a}>\sqrt[3]{b}\,, a>0, b>0,\ -\sqrt[4]{a}$, если $\sqrt[4]{a}<\sqrt[3]{b}, a\geq 0, b>0$.

3.3.4. Избавление от иррациональности в знаменателе дроби

Для решения таких задач часто применяются формулы сокращенного умножения.

Пример 6. Освободится от иррациональности в знаменателе дроби $A=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

Решение. Умножив числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы чисел $\sqrt[3]{2}$ и 1, получим

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[2]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[2]{2}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$$

Ответ: $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$

Пример 7. Освободится от иррациональности в знаменателе дроби $A=\dfrac{3}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Решение. Освободимся сначала от $\sqrt{3}$ в знаменателе, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$A=\frac{3\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{3\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3}=\frac{3\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}.$$

Теперь освободимся от $\sqrt{2}$ в знаменателе:

$$A=\frac{3\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\left(\sqrt{2}+2+\sqrt{6}\right)}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3\left(\sqrt{2}+2+\sqrt{6}\right)}{4}$.

ГЛАВА 4
КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН. ТЕОРЕМА ВИЕТА И ОБРАТНАЯ К НЕЙ. КВАДРАТИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ НА КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

4.1. Квадратичная функция

Определение 4.1

Квадратичной функцией (*квадратным трехчленом*) *называется функция вида* $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, *где* a, b, c — *некоторые числа.*

График трехчлена — парабола, абсцисса вершины $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Вид квадратичной функции в зависимости от дискриминанта $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ и знака параметра a представлен в таблице 4.1.

Теорема 4.1 (Теорема Виета для квадратного уравнения)

а) *Если квадратное уравнение*

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$$

имеет действительные корни $x = x_1$ *и* $x = x_2$, *то*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Обратная теорема Виета

б) *Если числа r и s таковы, что*

$$r + s = -\frac{b}{a}, \quad r \cdot s = \frac{c}{a},$$

то $x_1 = r$ и $x_2 = s$ *являются корнями квадратного уравнения*

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$$

Заметим также, что $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2x_0$, где x_0 — абсцисса вершины параболы.

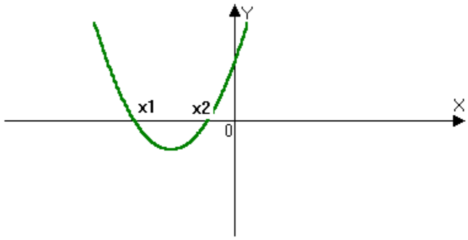
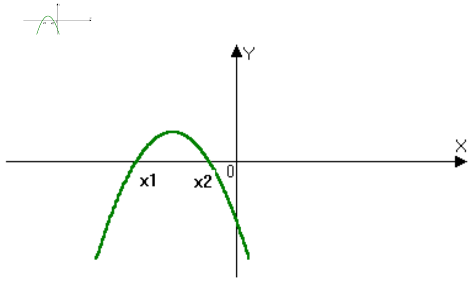
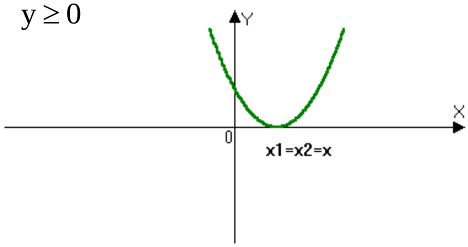
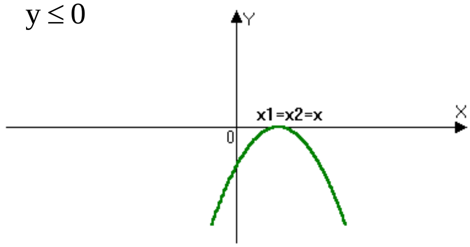
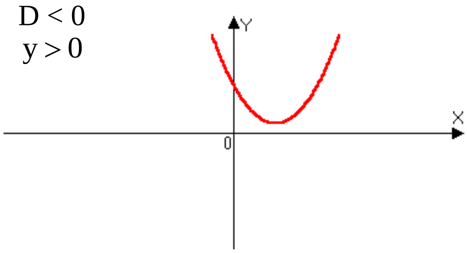
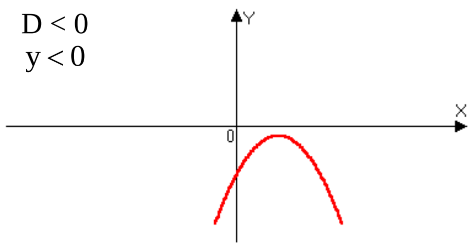
4.2. Решение квадратичных неравенств

Определение 4.2

Неравенства вида $y = ax^2 + bx + c \geq 0$, $y = ax^2 + bx + c \leq 0$ *или* $y = ax^2 + bx + c > 0$, $y = ax^2 + bx + c < 0$, $a \neq 0$, *где* a, b, c — *постоянные,* x — *неизвестная величина называются квадратичными неравенствами.*

Таблица 4.1

Вид квадратичной функции

$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$ 	$D > 0$ 
$D = 0$ $y \geq 0$ 	$D = 0$ $y \leq 0$ 
$D < 0$ $y > 0$ 	$D < 0$ $y < 0$ 

Квадратичные неравенства проще всего решаются графически. Для их решения достаточно приближенно построить соответствующую квадратичную функцию. Параболу строят приближенно, определяя направления ветвей и координаты точек ее пересечения с осью OX (т. е. решая квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$).

В результате получают один из шести графиков, представленных в таблице 4.1. После этого легко выделяют те значения x, при которых парабола находится выше или ниже оси OX, что и дает решение квадратичного неравенства.

Пример 1. Решить неравенство $10x-21-x^2>0$.

Решение. Решая соответствующее квадратное уравнение, получим его корни $x_1=3, x_2=7$. Ветви квадратичной функции направлены вниз, так как $a=-1<0$. Парабола имеет вид, представленный на рисунке 4.1. Из рисунка сразу видно, что $y>0$ при значениях $x\in(3;7)$.

Ответ: $x\in(3;7)$.

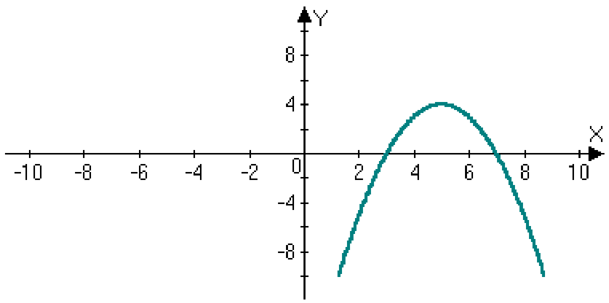


Рис. 4.1

Вид квадратичной функции в примере 1

Пример 2. Решить неравенство $|2x^2-9x+15|\geq 20$.

Решение. Исходное неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-9x+15\geq 20\\ 2x^2-9x+15\leq -20\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-9x-5\geq 0\\ 2x^2-9x+35\leq 0.\end{array}\right.$$

Решаем первое неравенство. Корни квадратного уравнения $2x^2-9x-5=0$ равны $x_1=5, x_2=-\frac{1}{2}$. Ветви параболы направлены вверх, следовательно, получаем график, представленный на рисунке 4.2.

Решение первого неравенства имеет вид $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[5;\infty)$.

Решаем второе неравенство. Дискриминант квадратного уравнения $2x^2-9x+35=0$ меньше нуля, следовательно, точек пересечения графика с осью OX нет. Ветви параболы направлены вверх, следовательно, получаем график, представленный на рисунке 4.3

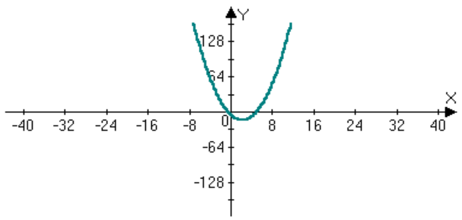


Рис. 4.2

График для решения первого неравенства

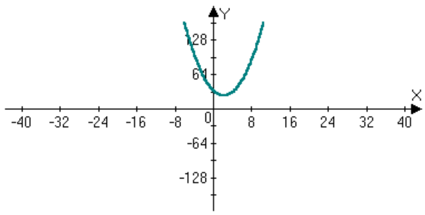


Рис. 4.3

График для решения второго неравенства

Решение второго неравенства имеет вид $x \in \varnothing$,так как при всех x параболы $y > 0$.

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 9x - 5 \ge 0 \\ 2x^2 - 9x + 35 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [5; \infty) \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [5; \infty).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [5; \infty)$.

Пример 3. Решить неравенство $|x| \cdot x \ge x$.

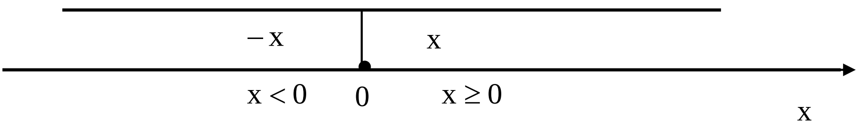
Решение.

Способ 1.

Раскроем модуль, входящий в неравенство:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0 \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Точка $x = 0$ разбивает ось x на два промежутка



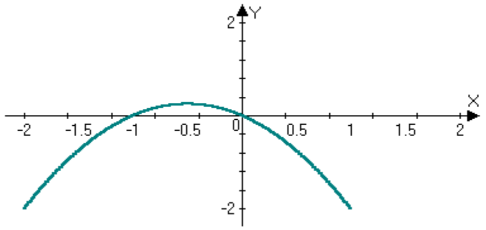
Тогда получаем и решаем совокупность из двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 \ge x \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 \ge x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая система содержит квадратичное неравенство $-x^2 - x \ge 0$. Корни соответствующего квадратного уравнения равны $x_1 = 0; x_2 = -1$. Ветви параболы направлены вниз. Следовательно, график данной параболы имеет вид, представленный на рисунке 4.4.

Решение соответствующего неравенства имеет вид $x \in [-1;0]$, решение системы $\begin{cases} x < 0 \\ x \in [-1;0] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;0)$. Вторая система содержит квадратичное неравенство $x^2 - x \ge 0$. Корни соответствующего квадратного уравнения равны

$x_1 = 0; x_2 = 1$. Ветви параболы направлены вверх. Следовательно, график данной параболы имеет вид, представленный на рисунке 4.5. Решение соответствующего неравенства имеет вид $x \in (-\infty;0] \cup [1;\infty]$, решение системы:



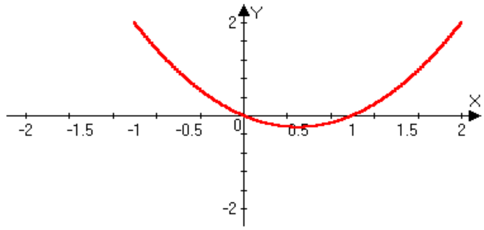


Рис. 4.4
График для решения первой системы

Рис. 4.5
График для решения второй системы

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \in (-\infty;0] \cup [1;\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0\} \cup [1;\infty).$$

Решение совокупности имеет вид

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-1;0) \\ x \in \{0\} \cup [1;\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-1;0] \cup [1;\infty).$$

Способ 2.

При $x = 0$ неравенство верное.

При $x > 0$ разделим обе части неравенства на x, получим равносильную систему неравенств $\begin{cases} x > 0 \\ |x| \ge 1 \end{cases}$. При $x < 0$ разделим обе части неравенства на x, получим равносильную систему неравенств $\begin{cases} x < 0 \\ |x| \le 1 \end{cases}$. Решение исходного неравенства — решение совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ |x| \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ |x| \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le -1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x \le -1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \le 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \\ -1 \le x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-1;0) \cup [1;\infty).$$

Включая в решение точку x = 0, получим окончательно $x \in [-1;0] \cup [1;\infty)$.

Ответ: $x \in [-1;0] \cup [1;\infty)$.

4.3. Применение теоремы Виета для решения задач

Теорема Виета позволяет решать задачи, связанные с преобразованием корней уравнения, не определяя их значения.

Пример 1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+4x-1=0$.

Найти величину $A=\frac{1}{\sqrt[3]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x_2}}$.

Решение. Заданное уравнение имеет действительные корни, так как его дискриминант положителен. Из теоремы Виета (4.1) следует, что $x_1+x_2=-4$ и $x_1\cdot x_2=-1$. Тогда можно записать $A=\frac{\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}}{\sqrt[3]{x_1\cdot x_2}}=-\left(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}\right)$.

Возведем обе части выражения в куб. С учетом того, что $x_1+x_2=-4$, а $x_1\cdot x_2=-1$, получим уравнение

$$A^3=-\left(x_1+x_2+3\sqrt[3]{x_1x_2}\left(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}\right)\right)=-(-4-3(-A))=-3A+4$$

или $A^3+3A-4=0$. Подбором корня многочлена получим $A=1$.

Тогда $A^3+3A-4=(A-1)\left(A^2+A+4\right)=0$. Уравнение $A^2+A+4=0$ корней не имеет.

Ответ: $A=\frac{1}{\sqrt[3]{x_1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x_2}}=1$.

Пример 2. Не решая уравнение $x^2-5x+3=0$, где $x_1;x_2$ его корни, составить новое квадратное уравнение, корни которого равны $x_1{}^4;x_2{}^4$.

Решение. Заданное уравнение имеет действительные корни, так как его дискриминант положителен. Из теоремы Виета (4.1) следует, что $x_1+x_2=5$ и $x_1\cdot x_2=3$. Новое квадратное уравнение с корнями $x_1{}^4;x_2{}^4$ запишем в виде $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. Для этого уравнения теорема Виета имеет вид

$$x_1{}^4+x_2{}^4=-\frac{b}{a};\ x_1{}^4x_2{}^4=\frac{c}{a}.$$

Тогда $\frac{c}{a}=3^4=81$.

Выделяя полный квадрат в выражении $-\frac{b}{a}=x_1{}^4+x_2{}^4$, получим $-\frac{b}{a}=\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)^2-2x_1{}^2x_2{}^2$. Продолжая далее, запишем

$$-\frac{b}{a}=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1{}^2x_2{}^2=(25-6)^2-18=343.$$

Новое квадратное уравнение имеет вид $x^2-343x+81=0$.

Ответ: $x^2-343x+81=0$.

Пример 3. Найти сумму квадратов корней уравнения

$$\left(x^2+2x\right)^2-1996(x^2+2x)+1997=0.$$

Решение. Обозначим $y=x^2+2x$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x^2+2x-y=0 \\ y^2-1996y+1997=0. \end{cases}$$

Уравнение $y^2-1996y+1997=0$ имеет два различных действительных корня y_1 и y_2, так как его дискриминант положителен. Уравнение $x^2+2x-y=0$ имеет действительные корни, если $4+4y\ge 0 \Leftrightarrow y\ge -1$. Применим теорему Виета для каждого уравнения системы. Тогда для второго уравнения получим

$$y_1 + y_2 = 1996,\ y_1y_2 = 1997.$$

Отсюда следует, что y_1 и y_2 положительны, а следовательно первое уравнение системы имеет два действительных корня x_1 и x_2 для значения y_1 и два действительных корня x_3 и x_4 для значения y_2. Для первого уравнения системы теорема Виета имеет вид

$$x_1+x_2=-2;\ x_1x_2=-y_1,$$
$$x_3+x_4=-2;\ x_3x_4=-y_2.$$

Сумма квадратов корней заданного уравнения равна

$$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+\left(x_3+x_4\right)^2-2x_3x_4=8+2(y_1+y_2).$$

Учитывая, что $y_1+y_2=1996$, получим сумму квадратов корней, равную $8+2\cdot 1996=4000$.

Ответ: 4000.

4.4. Основные приемы построения графиков функций

Пусть нам задан график функции $y=f(x)$.

Вопрос 1. Как построить график функции $y=-f(x)$?

Ответ. График функции $y=-f(x)$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ зеркальным отображением относительно оси OX (рис. 4.6).

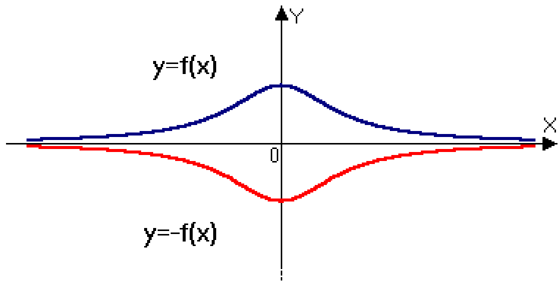


Рис. 4.6

График для ответа на вопрос 1

Вопрос 2. Как построить график функции $y=Af(x)$?

Ответ. График функции $y = Af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ умножением всех ее значений на A (если A > 1 — растяжение в A раз, если A < 1 — сжатие в A раз по оси OY) (рис. 4.7).

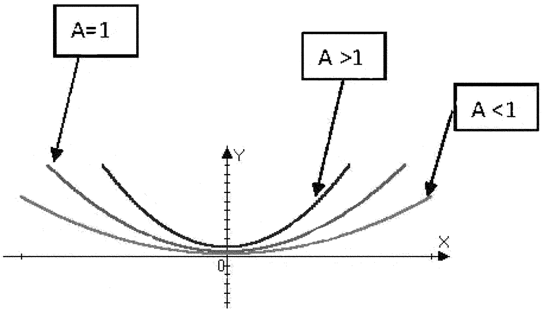


Рис. 4.7

График для ответа на вопрос 2

Вопрос 3. Как построить график функции $y = f(x) + A$?

Ответ. Данный график получается из графика функции $y = f(x)$ его сдвигом вдоль оси OY на A единиц вверх, если A > 0, или — вдоль оси OY на A единиц вниз, если A < 0.

Проще перемещать не график, а ось OX по правилу:

$A > 0$	Ось OX сдвигается вниз ↓
$A < 0$	Ось OX сдвигается вверх ↑

Вопрос 4. Как построить график функции $y = f(x + a)$?

Ответ. Данный график получается из графика $y = f(x)$ его сдвигом вдоль оси OX на a единиц влево, если a > 0, или — вдоль оси OX на a единиц вправо, если a < 0.

Проще перемещать не график, а ось OY по правилу:

$a > 0$	Ось OY сдвигается вправо →
$a < 0$	Ось OY сдвигается влево ←

Вопрос 5. Как построить график функции $y = |f(x)|$?

Ответ. График функции $y = f(x)$ в верхней полуплоскости остается без изменений, а часть графика, лежащая в нижней полуплоскости, симметрично отображается относительно оси OX в верхнюю полуплоскость (рис. 4.8).

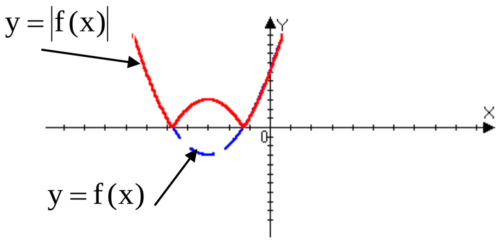


Рис. 4.8

График для ответа на вопрос 5

Вопрос 6. Как построить график выражения $|y| = f(x)$?

Ответ. Строится график в верхней полуплоскости.

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ y = f(x). \end{cases}$$

Далее строится график в нижней полуплоскости, который симметричен построенному графику в верхней полуплоскости относительно оси OX $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ y = -f(x) \end{cases}$ (рис. 4.9).

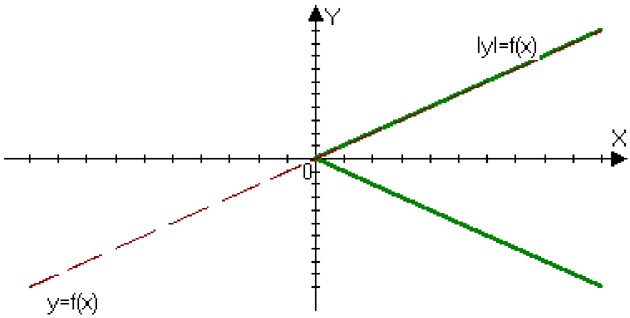


Рис. 4.9

График для ответа на вопрос 6

Вопрос 7. Как построить график функции $y = f(|x|)$?

Ответ. График, расположенный в правой полуплоскости, остается без изменений, а график в левой полуплоскости заменяется на график, симметричный графику в правой полуплоскости относительно оси OY (рис. 4.10).

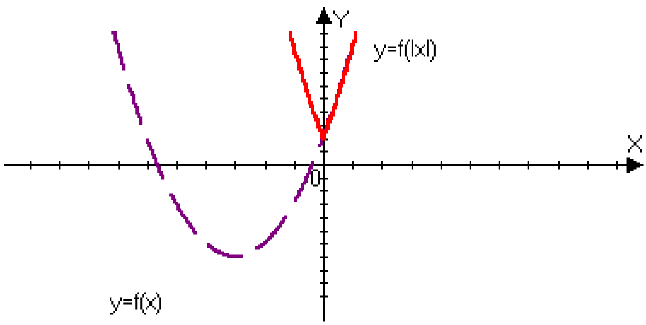


Рис. 4.10

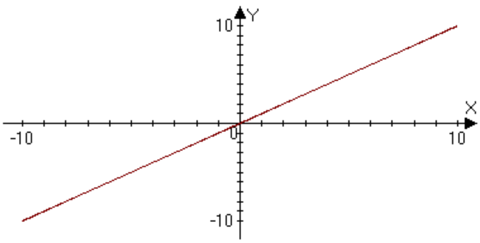
График для ответа на вопрос 7

Пример 1. Построить график $y = |2 - |x + 2||$.

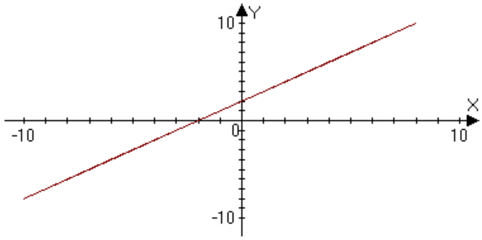
Решение. Ниже последовательно представлены этапы построения данного графика:

1. $y = x$; 2. $y = x + 2$; 3. $y = |x + 2|$; 4. $y = -|x + 2|$; 5. $y = 2 - |x + 2|$; 6. $y = |2 - |x + 2||$.

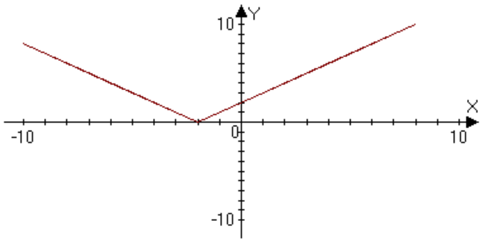
1



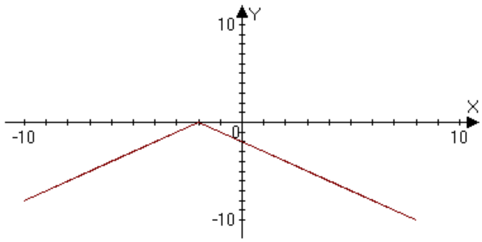
2



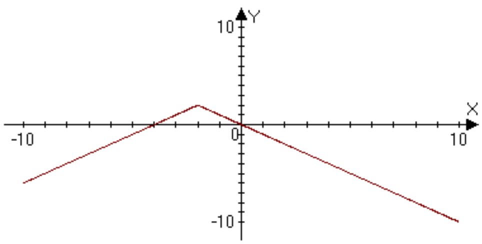
3



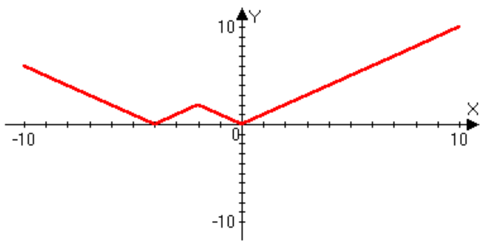
4



5



6



Построение графика производится в соответствии с основными приемами, описанными выше.

4.5. Задачи с параметрами на квадратный трехчлен. Теоремы о расположении корней квадратного уравнения

Многие задачи с параметрами на квадратный трехчлен решаются графически. В связи с этим весьма полезными оказываются приемы построения графиков, описанные в п. 4.4.

Пример 1. При каком значении параметра a уравнение $a = \frac{1}{4}x^2 - |x| - 3$ имеет три корня?

Решение. Построим графики функций $y = \frac{1}{4}x^2 - |x| - 3$ и $y = a$.

Так как $x^2 = |x|^2$, то построение графика $y = \frac{1}{4}x^2 - |x| - 3$ может быть произведено по правилу построения графика $y = f(|x|)$.

Сначала строим параболу $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$. Для построения параболы в данной задаче достаточно определить точки пересечения ее с осями координат, а также координату точки экстремума.

Определяем, что $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$ при $x_1 = -2; x_2 = 6$.

При $x = 0$ получаем, что $y = -3$. Ветви параболы направлены вверх; парабола имеет минимум в точке с координатами $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2$ и $y_0 = -4$. График данной параболы представлен на рисунке 4.11.

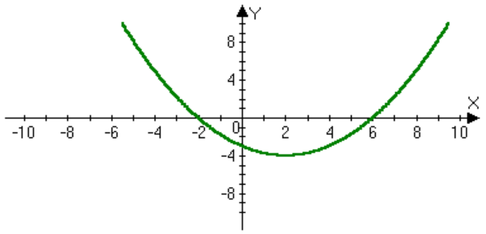


Рис. 4.11

График функции $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$

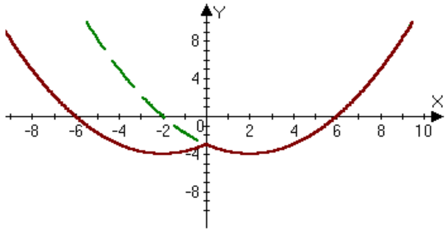


Рис. 4.12

График функции $y = \frac{1}{4}x^2 - |x| - 3$

График функции $y = \frac{1}{4}x^2 - |x| - 3$, построенной по правилу построения функции, представлен на рисунке 4.12. График функции $y = a$ представлен на рисунке 4.13.

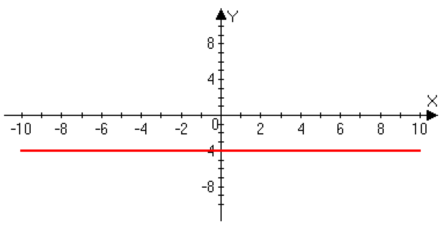


Рис. 4.13

График функции $y = a$

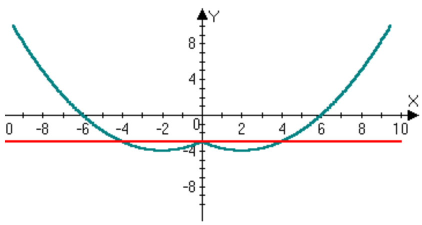


Рис. 4.14

Условие $a = \frac{1}{4}x^2 - |x| - 3$

Уравнение $a = \frac{1}{4}x^2 - |x| - 3$ имеет три решения в том случае, когда оба построенных графика имеют три точки пересечения. На рисунке 4.14 представлена такая ситуация. Видно, что при этом значение параметра а равно -3.

Ответ: $a = -3$.

Существует целый набор задач, связанных с определением расположения корней квадратного уравнения. Решение этих задач основано на применении теоремы Виета, и для их решения нет необходимости определять корни квадратного уравнения.

Сформулируем эти задачи в виде вопросов и ответов на них.

Пусть нам задан квадратный трехчлен $y = f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, x — неизвестная величина, a, b, c — параметры.

Обозначим $D = b^2 - 4ac$.

Вопрос 1. Пусть дано число d. При каких условиях на параметры a, b, c оба корня $x_1; x_2$ уравнения $y = ax^2 + bx + c = 0$ больше d, т. е. $x_2 \geq x_1 > d$?

Данная ситуация показана на рисунке 4.15.

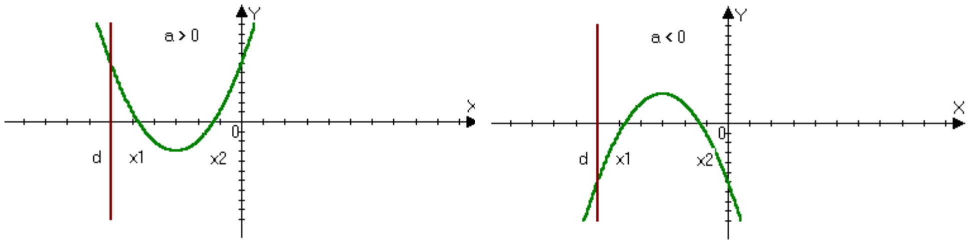


Рис. 4.15

Графики для ответа на вопрос 1

Ответ: Параметры квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} > d \\ af(d) = a\left(ad^2 + bd + c\right) > 0. \end{cases}$$

Вопрос 2. Пусть дано число d. При каких условиях на параметры a, b, c оба корня $x_1; x_2$ уравнения $y = ax^2 + bx + c = 0$ меньше d, т. е. $x_1 \leq x_2 < d$?

Данная ситуация показана на рисунке 4.16.

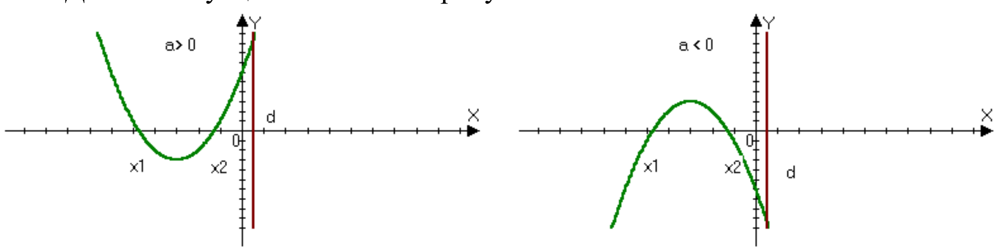


Рис. 4.16

Графики для ответа на вопрос 2

Ответ. Параметры квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ должны удовлетворять условиям $\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 = -\dfrac{b}{2a} < d \\ af(d) = a\left(ad^2 + bd + c\right) > 0. \end{cases}$

Вопрос 3. Пусть дано число d. При каких условиях на параметры a, b, c оба корня $x_1; x_2$ уравнения $y = ax^2 + bx + c = 0$ лежат по разные стороны от d, т. е. $x_1 < d < x_2$?

Данная ситуация показана на рисунке 4.17.

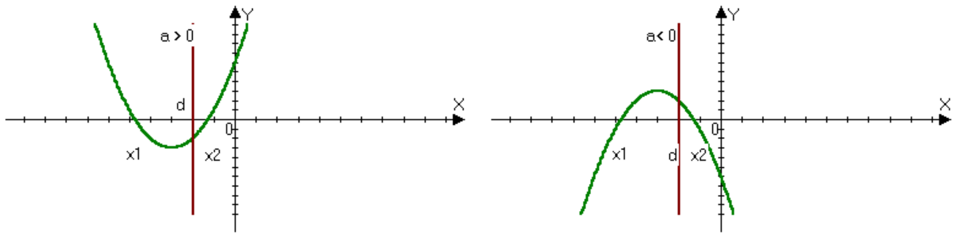


Рис. 4.17

Графики для ответа на вопрос 3

Ответ. Параметры квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ должны удовлетворять условию: $af(d) = a\left(ad^2 + bd + c\right) < 0$.

Вопрос 4. При каких условиях на параметры a, b, c оба корня $x_1; x_2$ уравнения $y = ax^2 + bx + c = 0$ различны и только один из них лежат в заданном интервале (n, m)?

Данная ситуация показана на рисунке 4.18.

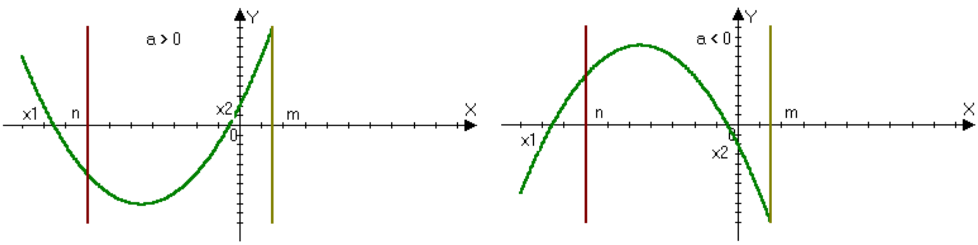


Рис. 4.18

Графики для ответа на вопрос 4

Ответ. Параметры квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ должны удовлетворять условию: $f(m) \cdot f(n) < 0$.

Вопрос 5. При каких условиях на параметры a, b, c множество корней уравнения $y = ax^2 + bx + c = 0$ не пусто и его корни $x_1; x_2$ лежат в заданном интервале (n, m), т. е. $n < x_1 \leq x_2 < m$?

Данная ситуация показана на рисунке 4.19.

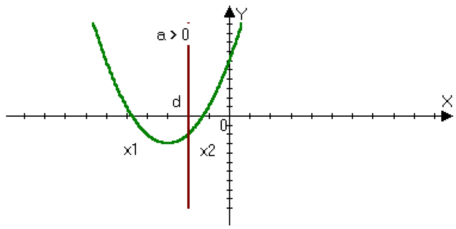


Рис. 4.19
Графики для ответа на вопрос 5

Ответ. Параметры квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ должны удовлетворять условию

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af(n) = a\left(an^2 + bn + c\right) > 0 \\ af(m) = a(am^2 + bm + c) > 0 \\ n < x_0 = -\dfrac{b}{2a} < m. \end{cases}$$

Вопрос 6. Пусть даны два числа m, n. Причем $n < m$. При каких условиях на параметры a, b, c один из корней уравнения $y = ax^2 + bx + c = 0$ меньше n, а другой корень больше m, т. е. $x_1 < n < m < x_2$?

Данная ситуация показана на рисунке 4.20.

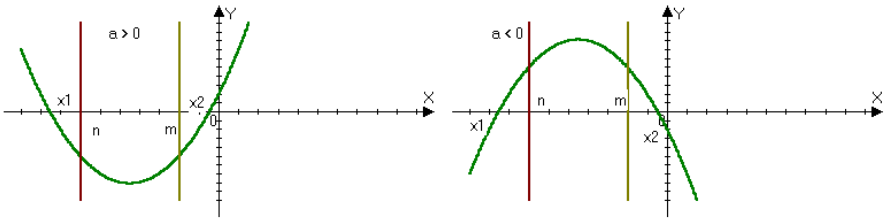


Рис. 4.20
Графики для ответа на вопрос 6

Ответ. Параметры квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ должны удовлетворять условию: $\begin{cases} af(m) = a\left(am^2 + bm + c\right) < 0 \\ af(n) = a(an^2 + bn + c) < 0. \end{cases}$

Пример 2. При каких значениях параметра a, корни $x_1; x_2$ уравнения $f(x) = ax^2 + (a^2 - 1)x - a = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < a < x_2$?

Решение. Решение неравенства $af(a) < 0$ гарантирует выполнение условия задачи (ответ на вопрос 3). Данное неравенство имеет вид

$$a\left(a^3 + (a^2 - 1)a - a\right) < 0 \Leftrightarrow a\left(2a^3 - 2a\right) < 0 \Leftrightarrow 2a^2\left(a^2 - 1\right) < 0.$$

Для решения последнего неравенства[1] обозначим $a^2 = t, t \geq 0$, тогда получим квадратичное неравенство $2t(t-1) < 0$, решение которого $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < a^2 < 1$.

[1] В п. 5.2.1 показано решение подобных неравенств методом интервалов.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} |a|<1, \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<a<1 \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-1;0)\cup(0;1).$$

Ответ: $a\in(-1;0)\cup(0;1)$.

Пример 3. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $f(x)=x^2-2ax+2a^2-4a+3=0$ меньше 1, а другой — больше 2?

Решение. Для решения задачи необходимо решить систему

$$\begin{cases} f(1)=\left(1-2a+2a^2-4a+3\right)<0 \\ f(2)=(4-4a+2a^2-4a+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=\left(a^2-3a+2\right)<0 \\ f(2)=(2a^2-8a+7)<0 \end{cases}$$ (Ответ на вопрос 6.)

Решение системы из двух квадратичных неравенств имеет вид

$$\begin{cases} 1<a<2 \\ 2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a<2+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<2.$$

Ответ: $a\in\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2};2\right)$.

Пример 4. Найти все значения параметра k, при которых уравнение $\left(k-2\right)x^4-2\left(k+3\right)x^2+k-1=0$ имеет четыре действительных корня, отличных от нуля.

Решение. Пусть $y=x^2, y\geq 0$. Тогда имеем уравнение

$$f(y)=\left(k-2\right)y^2-2\left(k+3\right)y+k-1=0.$$

Для того чтобы исходное уравнение имело четыре действительных корня, отличных от нуля, последнее уравнение должно иметь два положительных корня. Для решения этой задачи необходимо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ x_0=-\dfrac{b}{2a}>d \\ af(d)=a\left(ad^2+bd+c\right)>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(k+3\right)^2-\left(k-2\right)\left(k-1\right)\geq 0, \\ \dfrac{k+3}{k-2}>0, \\ \left(k-2\right)\left(k-1\right)>0. \end{cases}$$

(Ответ на вопрос 1 при d = 0). Решая систему, получим

$$\begin{cases} 9k+7\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} k>2, \\ k<-3, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} k>2, \\ k<1. \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow k>2.$$

Ответ: $k>2$.

ГЛАВА 5
РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

5.1. Методы решения рациональных уравнений

В данном разделе рассматриваются уравнения вида

$P(x)=0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}=0,$ где $P(x), Q(x)$ — многочлены, а также уравнения вида $f(x)=g(x),$ где $f(x), g(x)$ — рациональные выражения.

При решении рациональных (и других) уравнений основными являются следующие методы:

1) разложение на множители;

2) введение новых (вспомогательных) переменных.

Метод разложения на множители заключается в следующем:

Если $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x),$ то всякое решение уравнения $f(x)=0$ является решением совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0; \\ f_2(x)=0; \\ \ldots. \\ f_n(x)=0. \end{array}\right.$$

Пример 1. Решить уравнение: $x^4+12x^3+32x^2-8x-4=0$.

Решение. Преобразуем многочлен в левой части уравнения:

$$x^4+12x^3+32x^2-8x-4=x^4+12x^2+36x^2-4x^2-8x-4=$$
$$=\left(x^2+6x\right)^2-4x^2-8x-4=\left(x^2+6x\right)^2-4(x+1)^2=$$
$$=\left(x^2+6x+2x+2\right)\left(x^2+6x-2x-2\right)=\left(x^2+8x+2\right)\left(x^2+4x-2\right).$$

Задача свелась к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+8x+2=0 \\ x^2+4x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4+\sqrt{14} \\ x_2=-4-\sqrt{14} \\ x_3=-2+\sqrt{6} \\ x_4=-2-\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-4+\sqrt{14};\ -4-\sqrt{14};-2+\sqrt{6};-2-\sqrt{6}\right\}$.

Метод введения новых переменных основан на отыскании таких переменных, которые приводят сложное уравнение к известному случаю его решения.

Пример 2. Решить уравнение $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Решение. Применим метод введения новой переменной. Положим $y = x^3$. Тогда заданное уравнение примет вид: $y^2 - 9y + 8 = 0$, откуда находим $y_1 = 1; y_2 = 8$. Теперь задача сводится к решению совокупности простых уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^3 = 1 \\ x^3 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 2$.

Для решения рассматриваемых далее уравнений будем использовать методы разложения на множители и метод введения новой переменной.

5.1.1. Целые рациональные уравнения

Определение 5.1

Целыми рациональными уравнениями называют уравнения вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ где } a_n \neq 0. \tag{5.1}$$

Здесь $a_n, a_{n-1}, .., a_0$ — *известные числа* (*коэффициенты*), x — *неизвестная величина*.

Теорема 5.1. *Имеют место следующие высказывания при* $n = 1; n = 2$:

а) $$ax + b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{b}{a} \text{ при } a \neq 0, \\ x \in \varnothing \text{ при } \ a = 0, b \neq 0, \\ x \in R \text{ при } a = 0; b = 0; \end{array}\right.$$

б) $$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} bx + c = 0 \text{ при } a = 0, \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ при } a \neq 0, D = b^2 - 4ac \geq 0, \\ x \in \varnothing \text{ при } \ D = b^2 - 4ac < 0. \end{array}\right.$$

С помощью следующей теоремы можно методом разложения на множители решать целые рациональные уравнения степени $n > 2$, имеющие рациональные корни $\dfrac{p}{q}$.

Теорема 5.2.

Для того чтобы несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ *была корнем уравнения* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ *с целыми коэффициентами, необходимо, чтобы числитель этой дроби был делителем свободного члена* a_0, *знаменатель — делителем коэффициента* a_n *при старшем члене.*

1. Уравнения, решаемые методом подбора рационального корня

Таким образом, чтобы найти рациональные корни $\frac{p}{q}$ уравнения (5.1) с целыми коэффициентами при n > 2, надо:

- найти все целые делители свободного члена (положительные и отрицательные);
- найти все натуральные делители коэффициента при старшем члене;
- составить все дроби с найденными возможными значениями числителя и знаменателя;
- из найденных дробей отобрать те, которые удовлетворяют заданному уравнению.

Пример 3. Найти корни уравнения: $2x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 8x + 6 = 0$.

Решение. Свободный член заданного уравнения имеет делители: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6.$ Коэффициент 2 при старшем члене имеет натуральные делители 1 и 2. Значит, «претендентами» на корни являются числа: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}.$ Подставляя эти числа в исходное уравнение, отбираем корни: $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2}.$ Следовательно, многочлен $2x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 8x + 6 = 0$ делится без остатка на $2(x-1)(x-\frac{1}{2})$, т. е. на $2x^2 - 3x + 1$. Выполнив деление, получим частное $x^2 + 10x + 6 = 0$. Его корнями являются: $x_{3,4} = -5 \pm \sqrt{19}$.

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2};\ x_{3,4} = -5 \pm \sqrt{19}$.

Применение изложенных далее методов позволяет упростить подбор корня уравнения путем его выбора только из множества целых чисел. Для этого необходимо рассмотреть способы преобразования не приведенного целого рационального уравнения в приведенное.

1) Сделав в уравнении (5.1) замену переменной $x = \frac{t}{a_n} (a_n \neq 0)$, получим приведенное уравнение

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 a_n^{n-2} t + a_0 a_n^{n-1} = 0 \qquad (5.2)$$

с целыми коэффициентами.

Из теоремы 5.2 следует, что если уравнение (5.2) имеет целые корни, то они обязательно являются делителями его свободного члена $a_0 a_n^{n-1}$ $(q = \pm 1)$. Найдя делители свободного члена, выберем те из них, которые являются корнями уравнения. Если $t = k$ корень уравнения (5.2), то $x = \frac{k}{a_n}$ будет дробным корнем уравнения (5.1).

Пример 4. Решить уравнение $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.

Решение. Сделав замену $x = \frac{t}{2}$, получим уравнение $2\frac{t^3}{8} - 5\frac{t^2}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t^3 - 5t^2 + 4 = 0$, целые корни которого содержатся среди делителей его свободного члена $\pm 1; \pm 2; \pm 4$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что число t = 1 является корнем уравнения $t^3 - 5t^2 + 4 = 0$.

Разделив левую часть этого уравнения на $t - 1$, получаем $t^3 - 5t^2 + 4 = (t-1)(t^2 - 4t - 4) = 0$.

Следовательно, имеем совокупность $\left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t^2 - 4t - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \pm 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

И, наконец, воспользовавшись формулой $x = \frac{t}{2}$, находим все корни исходного уравнения: $x_1 = \frac{1}{2}; x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}; x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Однако, заметим, что часто этот способ замены приводит к большому перебору целых чисел, что является его недостатком.

2) Уравнения, левая часть которых представляет собой многочлен с целыми коэффициентами и свободным членом, равным 1 или -1, легко преобразуется в приведенные уравнения с помощью почленного деления на x в старшей степени и последующей заменой $\frac{1}{x}$ на y.

Пример 5. Решить уравнение $21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$.

Решение. В данном примере получаем: $21 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0$.

Полагая $\frac{1}{x} = y$, приходим к уравнению $21 + y - 5y^2 - y^3 = 0$ и далее $y^3 + 5y^2 - y - 21 = 0$. Определяя методом подбора, как и в предыдущих примерах, целый корень уравнения $y_1 = -3$ и разделив многочлен $y^3 + 5y^2 - y - 21$ на $y + 3$, получим квадратный трехчлен $y^2 + 2y - 7$ с корнями $y_{2,3} = -1 \pm 2\sqrt{2}$.

Так как $x = \frac{1}{y}$, то $x_1 = -\frac{1}{3}, x_{2,3} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$.

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_{2,3} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$.

3) Покажем на примере еще один способ преобразования уравнения в приведенное.

Пример 6. Решить уравнение: $4x^3 - 10x^2 + 14x - 5 = 0$.

Решение. Умножим обе части заданного уравнения на такое число, чтобы коэффициент при x^3 стал кубом некоторого целого числа. В нашем случае таким множителем может служить число 2. Умножим обе части уравнения на 2, получим $8x^3 - 20x^2 + 28x - 10 = 0$.

Положим теперь $y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$, тогда уравнение примет вид

$$y^3 - 5y^2 + 14y - 10 = 0.$$

Определяем корни приведенного уравнения. Здесь имеется только один корень $y_1 = 1$ (проверьте!). Находим, что $x = \frac{1}{2}$ — единственный корень заданного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

2. Метод решения возвратных уравнений

а) возвратные уравнения четной степени;

Определение 5.2

Рассмотрим уравнение четвертой степени

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,(a_4 \neq 0).$$

Если коэффициенты данного уравнения, равностоящие от концов уравнения, удовлетворяют условиям $\frac{a_1}{a_3} = k \neq 0$, $\frac{a_0}{a_4} = k^2$, *то исходное уравнение называется возвратным уравнением четвертой степени.*

Возвратные уравнения решаются так[1]: обе части исходного уравнения делятся на средний член без коэффициента (т. е. на x^2), затем группируются члены, равностоящие от концов, и делается замена $x + \frac{k}{x} = t$.

Пример 7. Решить уравнение $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решение. Так как $\frac{-5}{-5} = 1 = k; \frac{6}{6} = 1^2 = k^2$, то данное уравнение является возвратным (возвратные уравнения с k = 1 называются также **симметрическими** уравнениями). Деля обе части уравнения на x^2 и группируя равностоящие от концов члены, имеем

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Полагая $t = x + \frac{1}{x}$, имеем $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Поэтому уравнение приобретает вид $6t^2 - 5t - 50 = 0$. Оно имеет корни $\frac{10}{3}$ и $-\frac{5}{2}$.

[1] Заметим, что в силу условия $k \neq 0$ значение $x = 0$ не является корнем возвратного уравнения.

Получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3} \\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-10x+3=0 \\ 2x^2+5x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=\dfrac{1}{3} \\ x_3=-2 \\ x_4=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Решив уравнения $x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$ и $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$, получаем корни $\left\{3;\frac{1}{3};-2;-\frac{1}{2}\right\}$.

Ответ: $\left\{3;\frac{1}{3};-2;-\frac{1}{2}\right\}$;

б) возвратные уравнения нечетной степени;

Определение 5.3

Рассмотрим уравнение пятой степени

$$a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0\ (a_5\neq 0).$$

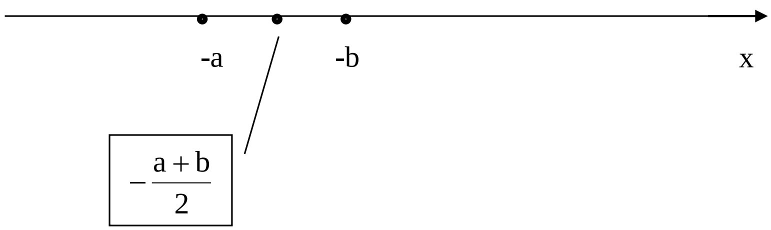
Если коэффициенты данного уравнения, равностоящие от концов уравнения, удовлетворяют условиям $\frac{a_2}{a_3}=k$, $\frac{a_1}{a_4}=k^3, \frac{a_0}{a_5}=k^5$, *то исходное уравнение называется возвратным уравнением пятой степени. Аналогично определяются возвратные уравнения других нечетных степеней.*

Возвратные уравнения нечетных степеней решаются так: одним из корней этого уравнения всегда является число $x=-k$, после деления левой части возвратного уравнения на двучлен $x+k$ придем к уравнению четвертой степени, которое тоже окажется возвратным и может быть решено по схеме, изложенной в предыдущем пункте.

3. Уравнения, решаемые методом симметризации

Рассмотрим уравнение вида $(x+a)^4+(x+b)^4=c.$

Отметим на оси x значения, при которых скобки в уравнении обращаются в ноль, т. е. $x=-a; x=-b$.



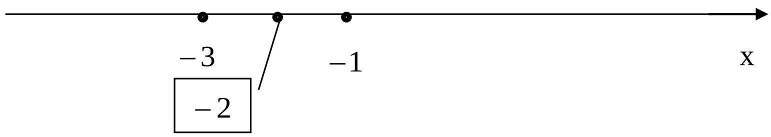
Отметим на оси x точку, находящуюся точно в середине между точками –a и –b, т. е. $x_0=-\frac{a+b}{2}$. Далее вводим новую неизвестную t, связанную с неизвестной x простым соотношением $t=x-x_0$. В результате такой замены приходим к уравнению с симметричными относительно нуля «добавками» к переменной t в каждой скобке $\left(t+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(t-\frac{a-b}{2}\right)^4=c$. После раскрытия скобок и приведения подобных членов это уравнение приводится к биквадратному уравнению относительно t, которое после замены $t^2=z$ сводится к квадратному уравнению.

Пример 8. Решить уравнение $(x+3)^4+(x+1)^4=272.$

Решение. Очевидно, что $x_0=-\frac{3+1}{2}=-2$.

Сделаем замену $t=x-x_0=x+2$ и подставим значение $x=t-2$ в уравнение; получим уравнение

$$(t+1)^4+(t-1)^4=272 \Leftrightarrow (t^2+2t+1)^2+(t^2-2t+1)^2=272 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad t^4+4t^2+1+4t^3+4t+2t^2+t^4+4t^2+1-4t^3+2t^2-4t-272=0.$$



После приведения подобных членов получим

$$2t^4+12t^2-270=0 \Leftrightarrow t^4+6t^2-135=0.$$

Заменой $z=t^2, z\ge 0$ сводим полученное биквадратное уравнение к квадратному $z^2+6z-135=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=-3\pm\sqrt{144}=-3\pm 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=9 \\ z_2=-15. \end{array}\right.$

Условию $z\ge 0$ удовлетворяет только $z=9 \Leftrightarrow t=\pm 3.$

Далее находим корни исходного уравнения $x_1=3-2=1,\ x_2=-3-2=-5.$

Ответ: $\{-5;1\}$.

4. Выделение полного квадрата

Пример 9. Решить уравнение $9(x+2)^2+9x^2-10x^2(x+2)^2=0.$

Решение. Выделим в уравнении полный квадрат:

$$9\left[(x+2)^2+2(x+2)x-2(x+2)x+x^2\right]-10x^2(x+2)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 9[(x+2)-x]^2+18(x+2)x-10x^2(x+2)^2=0 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 36+18(x+2)x-10x^2(x+2)^2=0.$$

Далее сделаем замену $t=x(x+2)$, получим уравнение

$$10t^2-18t-36=0 \Leftrightarrow 5t^2-9t-18=0.$$

Корни этого уравнения равны $t_1=3; t_2=-\frac{6}{5}$. Далее решаем совокупность из двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x-3=0 \\ x^2+2x+\frac{6}{5}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=1 \\ \varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-3;1\}$.

5.1.2. Дробно-рациональные уравнения

Рассмотрим решение уравнений вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$,

где $P(x), Q(x), P_1(x), Q_1(x)$ — многочлены.

Данное уравнение $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ равносильно следующему:

$$\begin{cases} P(x)\cdot Q_1(x) - P_1(x)\cdot Q(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0; Q_1(x) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, дробно-рациональное уравнение сводится к целому рациональному уравнению и, следовательно, для его решения можно использовать методы предыдущего раздела.

Пример 10. Решить уравнение $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{10}{9}$.

Решение.

Способ 1.

Представим исходное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} 9\left[(x+2)^2 + x^2\right] - 10x^2(x+2)^2 = 0 \\ x \neq 0; x \neq -2. \end{cases}$$

Получили уравнение, которое решено в примере 9.

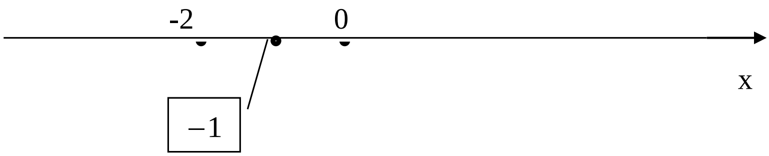
Только здесь $x \neq 0; x \neq -2$.

Ответ: $\{-3;1\}$.

Способ 2.

Данное уравнение можно также решить методом симметризации.

В уравнении $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{10}{9}$ можно сделать замену $t = x+1$. Тогда получим уравнение $\dfrac{1}{(t-1)^2} + \dfrac{1}{(t+1)^2} = \dfrac{10}{9}$.



Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 9\left[(t-1)^2 + (t+1)^2\right] - 10(t-1)^2(t+1)^2 = 0 \\ t \neq \pm 1. \end{cases}$$

После упрощений получим

$$18t^2 + 18 - 10t^4 + 20t^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow 5t^4 - 19t^2 - 4 = 0.$$

Заменим $z=t^2, z\ge 0$. Решением квадратного уравнения $5z^2-19z-4=0$ являются числа $z_1=4; z_2-\frac{1}{5}$. Условию $z\ge 0$ удовлетворяет только $z=4$. Откуда получим $t=\pm 2$. Находим корни исходного уравнения $x_1=2-1=1$, $x_2=-2-1=-3$.

Ответ: $\{-3;1\}$.

5.2. Методы решения рациональных неравенств

Определение 5.4

Неравенства вида $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}>\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}<\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$,

где $P_1(x), Q_1(x), P_2(x), Q_2(x)$ — *многочлены, называются рациональными неравенствами.*

Кроме указанных выше, к рациональным относятся неравенства вида $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\ge\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\le\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$.

Каждое из приведенных неравенств решается по единой схеме, поэтому остановимся подробно на решении неравенства вида $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\ge\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$.

Теорема 5.3

Неравенство $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\ge\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ *равносильно системе неравенств вида* $\frac{P(x)}{Q(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T(x)=P(x)\cdot Q(x)\ge 0 \\ Q(x)\ne 0, \end{cases}$ *где* $P(x), Q(x)$ — *многочлены,*
$P(x)=P_1(x)Q_2(x)-P_2(x)Q_1(x);\ Q(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$.

Таким образом, решение неравенства вида $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\ge\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ сводится к исследованию знака многочлена $T(x)=P(x)\cdot Q(x)$ и вычислению корней многочленов $P(x), Q(x)$, что связано с задачей их разложения на множители.

5.2.1. Решение рациональных неравенств методом интервалов

Рациональные неравенства, как правило, удается решить *методом интервалов*. Он основан на одном важном свойстве рациональной функции, которое мы примем без доказательства: в интервале между двумя соседними корнями многочлена $T(x)=P(x)\cdot Q(x)$ рациональная функция сохраняет постоянный знак.

Рассмотрим неравенство $T(x)\ge 0$. Приведем его к виду, который назовем стандартным. Известно, что

$$T(x)=a_n(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\dots(x-x_r)^{n_r}\cdot \tag{5.3}$$
$$\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{m_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где $a_n \neq 0$ — старший коэффициент многочлена T(x); $x_1 < ... < x_r$ — корни этого многочлена; $n_1, n_2, ... n_r, m_1, m_2, ... m_s$ натуральные числа; а квадратные трехчлены $x^2 + p_j x + q_j; j = 1,2..s$ не имеют действительных корней (т. е. их дискриминанты отрицательны). Напомним, что каждое из чисел $n_1, n_2, ..., n_r$ в формуле (5.3) называется порядком (или кратностью) соответствующего корня $x_1, x_2, ..., x_r$.

Так как дискриминанты всех квадратных трехчленов $x^2 + p_j x + q_j; j = 1,2..s$ отрицательны, и в каждом их них коэффициент при x^2 равен 1, то все они положительны при всех значениях x и поэтому не влияют на знак многочлена T(x).

Следовательно, по свойству равносильных преобразований неравенств (см. теорему 2.5 главы 2), можно обе части неравенства $T(x) \geq 0$ разделить на квадратные трехчлены, сохранив при этом знак неравенства.

В результате получим равносильное неравенство

$$T_1(x) = a_n (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} ... (x - x_r)^{n_r} \geq 0,$$

где все входящие в него обозначения определены выше.

Далее, разделив обе части этого неравенства на $a_n \neq 0$,получим неравенство стандартного вида $T^*(x) \geq 0,$ если $a_n > 0;$ или $T^*(x) \leq 0,$ если $a_n < 0;$ где

$$T^*(x) = (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} ... (x - x_r)^{n_r}. \qquad (5.4)$$

Определим схему решения рационального неравенства $T(x) \geq 0$ обобщенным методом интервалов.

1. Рациональное неравенство приводят к стандартному виду (5.4).

2. Корни $x_1 < ... < x_r$ многочлена $T^*(x)$ отмечают на числовой оси. Вся числовая ось разбивается этими корнями на конечное число интервалов, на каждом из которых левая часть неравенства сохраняет знак.

3. Чтобы определить знак левой части неравенства (5.4) на всем интервале, достаточно определить знак выражения $T^*(x)$ в одной какой-либо точке этого интервала.

4. Выбрать интервалы, которые входят во множество решений данного неравенства.

Замечание. Сами корни не входят в решение в случае строгого неравенства, т. е. $T^*(x) > 0$ или $T^*(x) < 0$. В случае нестрогого неравенства $T^*(x) \geq 0$, или $T^*(x) \leq 0,$ корни многочлена $T^*(x)$ входят в решение.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7} > 0$.

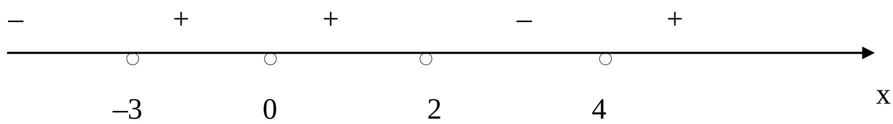
Решение. Неравенство $\dfrac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7} > 0$ равносильно неравенству

$$x^2(x-2)^3(x+3)(x-4)^7 > 0 \Leftrightarrow (x+3)x^2(x-2)^3(x-4)^7 > 0.$$

В данной задаче $T^*(x) = (x+3)x^2(x-2)^3(x-4)^7$.

$T^*(x)$ обращается в ноль в точках $x_1 = -3; x_2 = 0; x_3 = 2; x_3 = 4.$

Эти четыре точки разбивают числовую ось на пять интервалов $(-\infty; -3), (-3; 0), (0; 2); (2; 4), (4; \infty)$.



На интервале $(-\infty;-3)$ возьмем точку $x = -4$. Имеем $T^*(-4) < 0$, значит на интервале $(-\infty;-3)$ $T^*(x) < 0$.

На интервале $(-3;0)$ возьмем точку $x = -1$. Имеем $T^*(-1) > 0$, значит на интервале $(-3;0)$ $T^*(x) > 0$.

На интервале $(0;2)$ возьмем точку x = 1. Имеем $T(1) > 0$, значит на интервале $(0,2)$ $T^*(x) > 0$.

На интервале $(2;4)$ возьмем точку x = 3. Имеем $T(3) < 0$, значит на интервале $(2;4)$ $T^*(x) < 0$.

На интервале $(4;\infty)$ возьмем точку x = 5. Имеем $T(5) > 0$, значит на интервале $(4;\infty)$ $T^*(x) > 0$.

Нам надо было решить неравенство $T^*(x) > 0$. Из приведенного рассуждения ясно, что это неравенство выполняется на интервалах $(-3; 0), (0,2), (4; \infty)$. Объединение этих интервалов и представляет собой решение данного неравенства.

Ответ: $x \in (-3; 0) \cup (0; 2) \cup (4; \infty)$.

На практике, расстановку знаков стандартного неравенства (5.4) можно упростить, если придерживаться следующих правил:

1) расстановку знаков начинают с интервала, расположенного правее наибольшего корня, над которым всегда ставят знак плюс;

2) далее двигаются по числовой оси справа налево. При этом при переходе через последовательно встречающиеся корни знак выражения (5.4) по отношению к пройденному соседнему интервалу не меняется, если этот корень встречается четное число раз, если корень встречается нечетное число раз, то знак выражения по отношению к пройденному соседнему интервалу меняется на противоположный. Это правило расстановки знаков обычно называют просто методом интервалов.

Так, в рассмотренном выше примере 1, знаки в смежных интервалах относительно точки $x = 4$ разные, относительно точки x = 2 — разные, относительно точки x = 0 — одинаковые, относительно точки $x = -3$ — разные.

Тот же результат был получен нами выше подстановкой.

Пример 2. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{(x^2 + 4x - 5)(x^3 - 1)}{(x - 4)(x^2 - 7x + 12)}} + \sqrt{36 - x^2}\ .$$

Решение.

Область определения данной функции находится как решение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} T(x) = (x^2 + 4x - 5)(x^3 - 1)(x - 4)(x^2 - 7x + 12) \ge 0 \\ (x - 4)(x^2 - 7x + 12) \ne 0 \\ 36 - x^2 \ge 0. \end{cases}$$

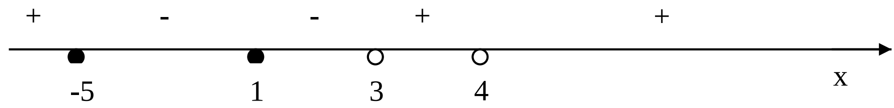
Раскладывая на множители выражения, входящие в неравенства, получим

$$\begin{cases} T(x) = (x - 1)^2 (x + 5)(x^2 + x + 1)(x - 4)^2 (x - 3) \ge 0 \\ (x - 4)^2 (x - 3) \ne 0 \\ (6 - x)(x + 6) \ge 0. \end{cases}$$

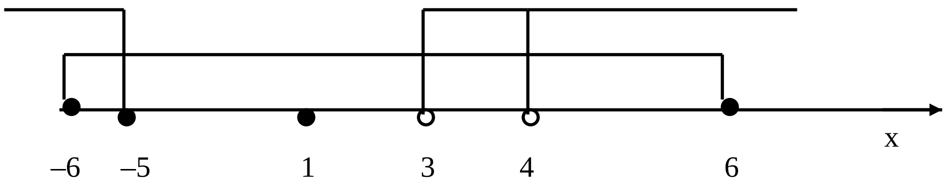
После равносильных упрощений последней системы запишем

$$\begin{cases} T^*(x) = (x + 5)(x - 1)^2 (x - 3)(x - 4)^2 \ge 0 \\ x \ne 3; x \ne 4 \\ (x - 6)(x + 6) \le 0. \end{cases}$$

Решая первые два неравенства системы методом интервалов, получим $x \in (-\infty; -5] \cup \{1\} \cup (3; 4) \cup (4; \infty)$.



Решение последнего неравенства системы имеет вид $x \in [-6; 6]$.



Решение системы неравенств

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -5] \cup \{1\} \cup (3; 4) \cup (4; \infty) \\ x \in [-6; 6] \end{cases}$$

приводит к окончательному ответу задачи $x \in [-6; -5] \cup \{1\} \cup (3; 4) \cup (4; 6]$.

Ответ: $x \in [-6; -5] \cup \{1\} \cup (3; 4) \cup (4; 6]$.

ГЛАВА 6
СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Основные теоретические сведения

Определение 6.1

Пусть даны два многочлена $R(x,y)=Q(x,y)$ *относительно* x *и* y*. Говорят, что дано алгебраическое уравнение с двумя неизвестными* x *и* y*, если требуются найти все пары чисел* (x_0,y_0)*, для каждой из которых справедливо числовое равенство* $R(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)$*. Каждая такая пара чисел называется решением данного уравнения.*

Пример 1. Решить уравнение $\left(x^2+y^2\right)\left[(x+1)^2+y^2\right]=0$.

Решение. Данное уравнение представляет собой совокупность из двух уравнений и имеет два решения.

Одно уравнение $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;0).$

(сумма двух неотрицательных выражений равно нулю, когда каждое из них равно нулю).

Второе уравнение $\left[(x+1)^2+y^2\right]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (-1;0)$.

Ответ: $\{(0;0);(-1;0)\}$.

Каждое алгебраическое уравнение $R(x,y)=Q(x,y)$ можно заменить ему равносильным уравнением $P(x,y)=0$, где $P(x,y)$ — многочлен относительно x и y.

Пример 2. Решить уравнение $3x^2+3y^2-4xy-2x-2y+2=0$.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно одной из переменных, например x.

$$3x^2-x(2+4y)+3y^2-2y+2=0.$$

Решая его, получим

$$x_{1,2}=\frac{(2+4y)\pm\sqrt{(2+4y)^2-12(3y^2+2-2y)}}{6}=\frac{(2+4y)\pm\sqrt{-20(y^2-2y+1)}}{6},$$

$$x_{1,2}=\frac{(2+4y)\pm\sqrt{-20(y-1)^2}}{6}.$$

Так как дискриминант уравнения $-20(y-1)^2\ge 0$, то решением данного неравенства может быть только y = 1 при условии $-20(y-1)^2=0$. Далее находим $x_{1,2}=\dfrac{(2+4)}{6}=1$.

Ответ: $(1;1)$.

Определение 6.2

Пусть даны многочлены $P(x,y)=0$ *и* $Q(x,y)=0$ *относительно* x *и* y. *Говорят, что дана система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными* x *и* y

$$\begin{cases} P(x,y)=0 \\ Q(x,y)=0, \end{cases} \tag{6.1}$$

если требуется найти все такие пары чисел (x_0,y_0), *каждая из которых является решением каждого из уравнений* (6.1). *Пара чисел* (x_0,y_0) *называется решением системы уравнений* (6.1), *если одновременно справедливы два числовых равенства* $P(x_0,y_0)=0$ *и* $Q(x_0,y_0)=0$. *Решить систему уравнений* (6.1) *значит найти множество всех ее решений.*

Определение 6.3

Несколько систем уравнений с двумя переменными x *и* y *образуют совокупность систем, если ставится задача об отыскании всех таких пар чисел* (x_0,y_0), *каждая из которых удовлетворяет по крайней мере одной из заданных систем. Каждая такая пара называется решением совокупности систем.*

Определение 6.4

Две системы уравнений называются равносильными, если множества их решений совпадают.

Укажем основные теоремы о равносильности систем уравнений.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y). \end{cases} \tag{6.2}$$

Теорема 6.1

Система уравнений $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_1(x,y)\pm f_2(x,y)=g_1(x,y)\pm g_2(x,y) \end{cases}$ *равносильна системе* (6.2).

Теорема 6.2

Если не существует таких пар (x_0,y_0), *при которых обе части уравнения* $f_1(x,y)=g_1(x,y)$ *одновременно обращаются в нуль, то система уравнений* $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)=g_1(x,y)\cdot g_2(x,y) \end{cases}$ *равносильна системе* (6.2).

Например, системы $\begin{cases} x=-y \\ x=y+5, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-y \\ x^2=-y(y+5) \end{cases}$ неравносильны, так как при $x=y=0$ обе части первого уравнения системы обращаются в нуль. Вторая система имеет посторонний корень $x=y=0$.

Теорема 6.3

Система уравнений $\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ [f_2(x,y)]^2=[g_2(x,y)]^2 \end{cases}$ *равносильна системе* (6.2), *если для любых* x, y *из области определения системы* (6.2) *выполняется неравенство* $f_2(x,y)\cdot g_2(x,y)\ge 0$.

Теорема 6.4

Если не существует таких пар (x_0, y_0), *при которых одновременно обращаются в нуль обе части второго уравнения системы* (6.2), *то система* $\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y) \\ \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = \dfrac{g_1(x,y)}{g_2(x,y)} \end{cases}$ *равносильна системе* (6.2).

Например, системы $\begin{cases} x(x+5) = y \\ x = y, \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+5) = y \\ x+5 = 1 \end{cases}$ неравносильны, так как при $x = y = 0$ обе части второго уравнения первой системы обращаются в нуль. В решении второй системы отсутствует корень $x = y = 0$.

Теорема 6.5 (расщепление системы)

Если первое уравнение системы (*6.1*) *равносильно совокупности k алгебраических уравнений* $\left[\begin{array}{l} P_1(x,y) = 0, \\ P_2(x,y) = 0 \\ \ldots \\ P_k(x.y) = 0, \end{array}\right.$ *, то система* (*6.1*) *равносильна совокупности k систем уравнений* $\begin{cases} P_1(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} P_2(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0, \end{cases}$ $\ldots$ $\begin{cases} P_k(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0. \end{cases}$

6.2. Основные методы решения систем уравнений

При решении систем уравнений в основном применяются следующие методы:

1) метод линейного преобразования системы (метод алгебраического сложения);
2) метод подстановки;
3) метод замены переменных.

Метод линейного преобразования системы является обобщением теоремы 6.1:

Теорема 6.6

Если $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$, *то система* $\begin{cases} a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y) = 0 \\ b_1 f_1(x,y) + b_2 f_2(x,y) = 0 \end{cases}$ *равносильна системе* $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0. \end{cases}$

В частности, если $a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = 1, b_2 = \pm 1$, то получим систему $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_1(x,y) \pm f_2(x,y) = 0 \end{cases}$ равносильную системе $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0. \end{cases}$

Метод подстановки основан на следующей теореме.

Теорема 6.7

Система уравнений $\begin{cases} x = F(y) \\ f(F(y), y) = g(F(y), y) \end{cases}$ *равносильна системе* $\begin{cases} x = F(y) \\ f(x, y) = g(x, y). \end{cases}$

Например, равносильными будут следующие системы:

$$\begin{cases} x = 2y - 5 \\ (2y-5)^2 + y^2 = 2(2y-5) + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ x^2 + y^2 = 2x + y. \end{cases}$$

Метод замены переменных состоит в следующем.

Если $\begin{cases} F_1(x,y) = f_1(\varphi_1(x,y); \varphi_2(x,y)) \\ F_2(x,y) = f_2(\varphi_1(x,y); \varphi_2(x,y)), \end{cases}$ то систему $\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_2(x,y) = 0 \end{cases}$ с помощью новых переменных $\varphi_1(x,y) = u; \varphi_2(x,y) = v$ можно записать в виде $\begin{cases} f_1(u,v) = 0 \\ f_2(u,v) = 0. \end{cases}$

Пусть $\{u_1; v_1\}, ... \{u_n; v_n\}$ — решения последней системы. Тогда задача сводится к решению следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = u_1 \\ \varphi_2(x,y) = v_1, \end{cases} \dots \begin{cases} \varphi_1(x,y) = u_n \\ \varphi_2(x,y) = v_n. \end{cases}$$

Решения этой совокупности будут одновременно и решениями системы

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0 \\ F_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$

Решение. Вычтем второе уравнение из первого. Тогда по теореме (6.1) получим равносильную систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = (13x + 4y) - (4x + 13y) \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$$

После упрощений первого уравнения системы, получим

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9(x - y) \\ y^2 = 4x + 13y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y - 9) = 0 \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$$

Данная система равносильна следующей совокупности систем (расщепление системы):

1. $\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$

Каждую из этих систем решим методом подстановки.

Первая система преобразуется к виду

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 = 4y + 13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 17 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 17 \\ y_2 = 17. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вторая система преобразуется к виду $\begin{cases} x = 9 - y \\ y^2 = 4(9 - y) + 13y = 36 + 9y. \end{cases}$

Из второго уравнения системы находим, что $y_3 = 12; y_4 = -3$, и далее из соотношения $x = 9 - y$ получаем $x_3 = -3; x_4 = 12$.

Ответ: $\{(0;0);(17;17);(-3;12);(12;-3)\}$.

6.3. Однородные системы уравнений

Определение 6.5

Выражение $F(x,y)$ *называется однородным выражением порядка k, если выполняются следующие условия:*

а) $(x,y) \in D(F) \Leftrightarrow (tx,ty) \in D(F)$ *для всех* t;

б) $F(tx,ty) = t^k F(x,y)$ *для всех* $(x,y) \in D(F)$.

Например, выражение $F(x,y) = x^3y + xy^3$ является однородным порядка 4, так как

$$F(tx,ty) = (tx)^3 \cdot (ty) + (tx) \cdot (ty)^3 = t^4(x^3y + xy^3) = t^4 F(x,y).$$

Теорема 6.8

Для того чтобы многочлен $F(x,y)$ *был однородным выражением порядка* k, *необходимо и достаточно, чтобы каждый его член имел одну и ту же степень, равную* k.

Однородные системы решается комбинацией двух методов: введения новой переменной и подстановкой.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} F_1(x,y) = a \\ F_2(x,y) = b, \end{cases} \qquad (6.3)$$

где $F_1(x,y), F_2(x,y)$ — однородные многочлены одного и того же порядка k. Тогда систему (6.3) можно при $x \neq 0$ (при x = 0 система исследуется отдельно) представить в виде $\begin{cases} F_1(x,y) = \dfrac{F_1(tx,ty)}{t^k} = a \\ F_2(x,y) = \dfrac{F_2(tx,ty)}{t^k} = b. \end{cases}$

Полагая далее $t = \dfrac{1}{x}$, получим систему $\begin{cases} x^k F_1\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = a \\ x^k F_2\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = b. \end{cases}$

Разделив первое уравнение системы на второе, и сделав замену $\frac{y}{x}=u$, получим уравнение с одним неизвестным u: $\frac{F_1(1;u)}{F_2(1;u)}=\frac{a}{b}$. Определяя его корни $u=u_j; j=1,2...m$, далее из одного уравнения системы (например, из первого) вычисляем $x^k=\frac{a}{F_1(1,u_j)}$, $j=1,2...m$ и, следовательно, для определения корней системы (6.3) имеем совокупность систем вида $\begin{cases} x^k=\frac{a}{F_1(1,u_j)} \\ \frac{y}{x}=u_j \\ j=1,2...m \end{cases}$, которые без труда решаются подстановкой.

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ x^2-3xy-2y^2=8. \end{cases}$

Решение. При x = 0 система решений не имеет.

Поэтому, считая, что $x\neq 0$, представим систему в виде $\begin{cases} x^2\left(3-2\frac{y}{x}\right)=160 \\ x^2\left(1-3\frac{y}{x}-2\frac{y^2}{x^2}\right)=8. \end{cases}$

Разделив первое уравнение на второе и сделав замену $\frac{y}{x}=u$, получим уравнение

$$\frac{3-2u}{1-3u-2u^2}=20 \Leftrightarrow 3-2u=20-60u-40u^2 \Leftrightarrow 40u^2+58u-17=0.$$

Корни данного уравнения $u_1=\frac{1}{4}; u_2=-\frac{17}{10}$.

Учитывая первое уравнение системы и соотношение $\frac{y}{x}=u$, приходим к системе $\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ y=ux \end{cases}$. Подставляя $u=u_1=\frac{1}{4}$, получим

$$\begin{cases} 3x^2-\frac{x^2}{2}=160 \\ y=\frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=64 \\ y=\frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 8 \\ y=\frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-8 \\ y=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставляя $u = u_2 = -\frac{17}{10}$, получим

$$\begin{cases} 3x^2 + \frac{17x^2}{5} = 160 \\ y = -\frac{17}{10}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y = -\frac{17}{10}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = -\frac{17}{10}x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5 \\ y = -\frac{17}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{17}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{(-8;-2);(8;2);\left(5;-\frac{17}{2}\right);\left(-5;\frac{17}{2}\right)\right\}$.

6.4. Симметрические системы

Определение 6.6

Выражение $F(x, y)$ *называется симметрическим, если оно при замене переменных* x *на* y, y *на* x *не изменяется.*

Так, симметрическими будут следующие выражения

$$F(x, y) = x^2 + 3xy + y^2, F(x, y) = \sqrt{x + y} + 2xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Основными симметрическими многочленами с двумя переменными считаются $u = x + y$ и $v = xy$.

Все остальные симметрические многочлены с двумя переменными могут быть выражены через основные, например:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv$
$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$
$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = (u^2 - 2v)(u^3 - 3uv) - uv^2 =$ $= u^5 - 5u^3v + 5uv^2$
$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = u^2 - v$
и т. д.

Система, все уравнения которой симметрические, называется симметрической. Ее можно решить методом замены переменных, выбрав в качестве новых переменных основные симметрические многочлены.

Пример 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

Решение. Положим $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy. \end{cases}$

Тогда имеем $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17 \\ u + v = 5. \end{cases}$

Первое уравнение системы может быть записано в виде

$$u^3 + v^3 - 3uv = (u + v)(u^2 - uv + v^2) - 3uv = 5(u^2 - uv + v^2) - 3uv = 17$$

Получим систему $\begin{cases} 5u^2 - 8uv + 5v^2 = 17 \\ u + v = 5. \end{cases}$

Решая систему методом подстановки, получим $\begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} u_2 = 3 \\ v_2 = 2. \end{cases}$

Теперь остается решить следующую совокупность систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\{(1;2);(2;1)\}$.

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$

Решение. Разложим левую часть второго уравнения на множители.

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2) =$$
$$= 19 \cdot (x^2 + xy + y^2) = 931.$$

Тогда система примет вид $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19 \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$ Положим $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy. \end{cases}$

Получим систему $\begin{cases} u^2 - 3v = 19 \\ u^2 - v = 49. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое, получим $\begin{cases} 2v = 30 \\ u^2 - v = 49. \end{cases}$

Решениями этой системы будут числа $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} v = 15 \\ u = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} v = 15 \\ u = -8. \end{cases} \end{array} \right.$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=8\\ xy=15\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-8\\ xy=15\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5\\ y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\ y=-5\end{cases}\\ \begin{cases}x=-5\\ y=-3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(5;3);(3;5);(-3;-5);(-5;-3)\}$.

6.5. Применение теоремы Виета для решения систем уравнений

Теорема 6.9 (Теорема Виета)

а) *если уравнение* $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ $(a_3\neq 0)$ *имеет три действительных корня* $x=x_1, x=x_2, x=x_3$, *то справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_2}{a_3}\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_1}{a_3}\\ x_1x_2x_3=-\dfrac{a_0}{a_3}.\end{cases} \tag{6.4}$$

б) обратная теорема:

если числа x_1, x_2, x_3 *таковы, что выполняются условия (6.4), то* $x=x_1, x=x_2, x=x_3$ *являются корнями уравнения*

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0 \quad (a_3\neq 0).$$

Пример 7. Решить систему уравнений $\begin{cases}2x+3y+5z=11\\ 6xy+10xz+15yz=36\\ 5xyz=6.\end{cases}$.

Решение. Обозначим $2x=x_1; 3y=x_2; 5z=x_3$. Исходная система примет вид $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=11\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=36\\ x_1x_2x_3=36.\end{cases}$.

Согласно обратной теореме Виета, для уравнения третьей степени числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $u^3-11u^2+36u-36=0$.

Определяя корень среди делителей свободного члена 36, находим, что один из корней уравнения $u_1=2$. Разделив затем левую часть этого уравнения на $u-2$ (методом деления «углом»), получим квадратное уравнение $u^2-9u+18=0$.

Корнями этого уравнения будут числа $u_2=6; u_3=3$.

Итак, $x_1=2, x_2=6, x_3=3$. Учитывая симметричность исходной системы относительно x_1, x_2, x_3 и то, что $x=x_1/2; y=x_2/3; z=x_3/5$, находим шесть ее решений. Таким образом, получим следующий ответ:

Ответ:
$\{(1;2;3/5);(1;1;6/5);(3;2/3;3/5);(3;1;2/5);(3/2;2/3;6/5);(3/2;2;2/5)\}$.

ГЛАВА 7
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И НЕРАВЕНСТВА.
СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение 7.1

Иррациональными называются уравнения (*неравенства*), *в которых переменная содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в дробную степень.*

Сначала рассмотрим решение иррациональных уравнений и систем.

7.1. Решение иррациональных уравнений и систем уравнений

Основными методами решения иррациональных уравнений являются следующие:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) метод введения новых переменных.

В некоторых случаях оказывается целесообразным применение различных искусственных приемов.

Приведем две теоремы равносильных преобразований иррациональных уравнений.

Теорема 7.1

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Теорема 7.2

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)} = t \ge 0 \\ t = g(x). \end{cases}$$

7.1.1. Решение иррациональных уравнений методом возведения обеих частей в одну и ту же степень

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$.

Решение. Определим ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 2x+6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$$

Заметим, что обе части уравнения неотрицательны, следовательно, возведение обеих частей уравнения в квадрат является равносильным преобразованием. После возведения в квадрат, приведения подобных членов и уединения радикала, получим уравнение $2\sqrt{2x^2+4x-6} = 31-3x$.

Левая часть полученного уравнения неотрицательна, следовательно, правая часть должна быть также неотрицательна, т. е. $31-3x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{31}{3}$.

Таким образом, решение данного уравнения находится в промежутке $1 \le x \le \frac{31}{3}$.

После возведения в квадрат уравнения $2\sqrt{2x^2+4x-6} = 31-3x$, получим $8x^2+16x-24 = 9x^2-186x+961$, и далее $x^2-202x+985=0$.

Корни этого уравнения $x_1=5; x_2=197$. Исходному уравнению удовлетворяет только $x_1 = 5 \in \left[1; \frac{31}{3}\right]$.

Ответ $\{5\}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2+x}$.

Решение. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \\ 2+x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Поскольку обе части уравнения неотрицательны, то возведение обеих частей в квадрат будет равносильной операцией. После возведения в квадрат и уединения радикала, получим уравнение $2\sqrt{x^2-3x+2} = 5-x$.

Левая часть полученного выражения неотрицательна, следовательно, неотрицательной должна быть и правая часть, т. е. $x \le 5$. Таким образом, корни данного уравнения находятся в промежутке $2 \le x \le 5$.

Повторное возведение в квадрат обеих частей полученного уравнения $2\sqrt{x^2-3x+2} = 5-x$ приводит к квадратному уравнению $3x^2-2x-17=0$.

Решая его, находим корни $x_1 = \frac{1+2\sqrt{13}}{3}; x_2 = \frac{1-2\sqrt{13}}{3}$.

Промежутку $2 \le x \le 5$ принадлежит только корень $x_1 = \frac{1+2\sqrt{13}}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{1+2\sqrt{13}}{3}\right\}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}=\sqrt[3]{2x-1}$.

Решение. Данное уравнение решается по стандартной схеме.

ОДЗ данного уравнения: $x \in R$. Возведем обе части уравнения в куб, что является равносильным преобразованием.

Получим уравнение

$$\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}\right)^3 = 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+1+6x+1+3\left(\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\right)\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}\right) = 2x-1.$$

Далее запишем $3\left(\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\right)\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}\right) = -6x-3$.

Воспользовавшись исходным уравнением, заменим выражение $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}$ в скобках на выражение $\sqrt[3]{2x-1}$. Тогда получим уравнение $\sqrt[3]{(2x+1)(2x-1)(6x+1)}=-(2x+1)$.

Возведем обе части последнего уравнения в куб: $(2x+1)(6x+1)(2x-1)=-(2x+1)^3$, и далее $(2x+1)[(6x+1)(2x-1)+(2x+1)^2]=0$, откуда находим $x_1=-\frac{1}{2}; x_{2,3}=0$.

Заметим, что проведенная выше замена выражения $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}$ на $\sqrt[3]{2x-1}$ не является равносильным преобразованием и, следовательно, после решения подобных примеров необходима проверка.

Проверка. Подстановкой значений $x_1=-\frac{1}{2}; x_{2,3}=0$ в заданное уравнение убеждаемся, что его корнем является только число $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

7.1.2. Метод введения новых переменных

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2$.

Решение. ОДЗ уравнения имеет вид

$$\begin{cases}1-x\ge 0\\ 15+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -15\le x\le 1.$$

Возведение обеих частей уравнения в четвертую степень приводит к громоздким вычислениям. Метод введения новых переменных приводит решаемое иррациональное уравнение к системе рациональных уравнений.

Введем новые переменные

$$\begin{cases}u=\sqrt[4]{1-x}\\ v=\sqrt[4]{15+x}.\end{cases} \tag{7.1}$$

Тогда получим первое уравнение системы $u+v=2$.

Исключим переменную x из выражения (7.1). Возведем в четвертую степень каждое из уравнений этого выражения. Получим $\begin{cases}u^4=1-x\\ v^4=15+x.\end{cases}$

Складывая уравнения системы, исключаем переменную x, получая при этом второе уравнение системы $u^4+v^4=16$.

Таким образом, имеем систему из двух рациональных уравнений относительно новых переменных $\begin{cases}u+v=2\\ u^4+v^4=16.\end{cases}$

Решим данную систему с помощью симметрических многочленов.

Обозначим $\begin{cases} u_1 = u + v \\ v_1 = uv. \end{cases}$

Тогда (см. главу № 6, п. 6.4) $u^4 + v^4 = u_1^4 - 4u_1^2 v_1 + 2v_1^2$, получим систему

$$\begin{cases} u_1^4 - 4u_1^2 v_1 + 2v_1^2 = 16 \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8v_1 + v_1^2 = 0 \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(v_1 - 8) = 0 \\ u_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u_2 = 2 \\ v_2 = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2 \\ v = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, решение данного уравнения свелось к решению следующей совокупности систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[4]{1 - x} = 0 \\ \sqrt[4]{15 + x} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[4]{1 - x} = 2 \\ \sqrt[4]{15 + x} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -15 \\ x = -15 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -15. \end{array}\right.$$

Оба значения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $\{1; -15\}$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{7x^2 + 8x + 10} - \sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 2x$.

Решение. ОДЗ данного уравнения $x \in R$.

Обозначим $\begin{cases} u = \sqrt{7x^2 + 8x + 10} \\ v = \sqrt{7x^2 - 8x + 10}. \end{cases}$

Тогда первое уравнение системы имеет вид $u - v = 2x$. Для получения второго уравнения системы возведем в квадрат обе части выражений с заменами, получим $\begin{cases} u^2 = 7x^2 + 8x + 10 \\ v^2 = 7x^2 - 8x + 10. \end{cases}$

Вычитая второе уравнение из первого, получим $u^2 - v^2 = 16x$.

В итоге запишем систему $\begin{cases} u - v = 2x \\ u^2 - v^2 = 16x \end{cases} \Leftrightarrow u^2 - v^2 - 8(u - v) = 0$.

Далее имеем $(u - v)(u + v - 8) = 0$. Получим совокупность $\left[\begin{array}{l} u - v = 0 \\ u + v = 8. \end{array}\right.$

Из первого уравнения совокупности следует, что $u = v$ или

$$\sqrt{7x^2 + 8x + 10} = \sqrt{7x^2 - 8x + 10} \Leftrightarrow 7x^2 + 8x + 10 = 7x^2 - 8x + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Рассматривая второе уравнение системы вместе с уравнением $u - v = 2x$, получим систему $\begin{cases} u + v = 8 \\ u - v = 2x. \end{cases}$

Складывая уравнения системы, получим $u = x + 4$ или $\sqrt{7x^2 + 8x + 10} = x + 4$. Корни данного уравнения должны удовлетворять условию $x + 4 \ge 0$. Возводя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{7x^2 + 8x + 10} = x + 4$, после простых упрощений получим выражение $6(x^2 - 1) = 0$. Откуда получаем корни уравнения, удовлетворяющие ОДЗ, а также условию $x \ge -4 \Rightarrow x = \pm 1$.

Ответ: $\{0; \pm 1\}$.

Рассмотрим решение **примера 1** методом введения новых переменных.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$. ОДЗ уравнения: $x \ge 1$.

Обозначим

$$\begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \sqrt{2x+6}. \end{cases} \tag{7.2}$$

Тогда получим первое уравнение системы $u + v = 6$. Исключим переменную x из выражения (7.2). Возведем в квадрат каждое из уравнений этого выражения. Получим $\begin{cases} u^2 = x - 1 \\ v^2 = 2x + 6. \end{cases}$

Умножая первое уравнение системы на (-2) и складывая со вторым, получим систему, решаемую подстановкой:

$$\begin{cases} v^2 - 2u^2 = 8 \\ u + v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6-u)^2 - 2u^2 = 8 \\ u + v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} u^2 + 12u - 28 = 0 \\ u + v = 6. \end{array} \right.$$

Решая систему, получим $\begin{cases} u_1 = -14 \\ v_1 = 20 \end{cases}$ или $\begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 4. \end{cases}$

Подставляя полученные решения в (7.2), запишем

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = -14 \\ \sqrt{2x+6} = 20 \end{cases} \text{или} \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{2x+6} = 4. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а решение второй системы имеет вид $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{2x+6} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \in$ ОДЗ.

Ответ: $x = 5$.

7.1.3. Использование свойств функций при решении иррациональных уравнений

Нижеследующие рассуждения будут относиться не только к решению иррациональных уравнений, но и к уравнениям любого вида, а также и к неравенствам.

Не всякое уравнение $f(x)=g(x)$ в результате преобразований или с помощью удачной замены переменной может быть сведено к уравнению того или иного стандартного вида, для которого существует определенный алгоритм решения. В таких случаях оказывается полезным использовать некоторые свойства функций $f(x), g(x)$. Так, если одна из функций убывает, а другая возрастает на некотором промежутке, то уравнение $f(x)=g(x)$ либо имеет один корень (рис. 7.1), либо не имеет корней (рис. 7.2).

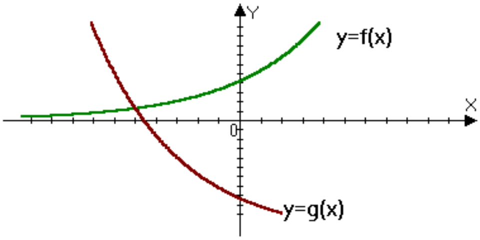


Рис. 7.1
Один корень уравнения $f(x)=g(x)$

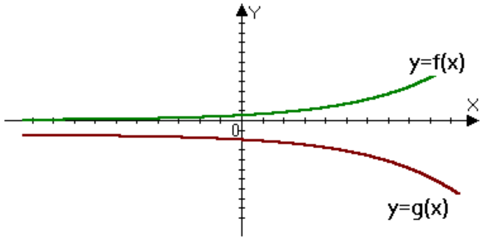


Рис. 7.2
Уравнения $f(x)=g(x)$ не имеет корней

Снова рассмотрим **пример 1**.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6$.

Запишем данное уравнение следующим образом $\sqrt{x-1}=6-\sqrt{2x+6}$. Можно подбором найти корень этого уравнения $x=5$. Так как функция $y=\sqrt{x-1}$ возрастает, а функция $y=6-\sqrt{2x+6}$ убывает, то других корней уравнение не имеет.

Ответ: $x=5$.

7.1.4. Системы иррациональных уравнений

При решении систем иррациональных уравнений применяются рассмотренные ранее приемы решения иррациональных уравнений, а также систем рациональных уравнений.

Пример 8. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^4-y^2=x \\ x^2+\sqrt{x+y}=y. \end{cases}$

Решение. ОДЗ системы: $x+y\geq 0$.

Запишем систему в виде $\begin{cases} x^4-y^2=x \\ y-x^2=\sqrt{x+y}. \end{cases}$

Из второго уравнения системы следует, что для существования решений необходимо выполнение условия $y-x^2\geq 0$. Возводя обе части второго уравнения в квадрат, получим

$$\left(y-x^2\right)^2=(x+y) \Leftrightarrow y^2-2x^2y+x^4=x+y \Leftrightarrow x^4-2x^2y+y^2-x-y=0.$$

Далее, заменяя во втором уравнении $x^4 - x$ на y^2, получим систему

$$\begin{cases} x^4 - x = y^2 \\ (x^4 - x) - 2x^2y + y^2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x = y^2 \\ 2y^2 - 2x^2y - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x = y^2 \\ y\left(2y - 2x^2 - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Полученная система расщепляется на совокупность из двух систем

1) $\begin{cases} y = 0 \\ x^4 - y^2 = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2y - 2x^2 - 1 = 0 \\ x^4 - y^2 = x. \end{cases}$

Решение первой системы приводит к корням $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0. \end{cases}$

Эти корни удовлетворяют условиям $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ y - x^2 \geq 0. \end{cases}$ Вторую систему запишем в виде

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{2} = y \\ x^4 - y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{2} = y \\ x^4 - \left(x^4 + x^2 + \dfrac{1}{4}\right) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{2} = y \\ 4x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{2} = y \\ (2x+1)^2 = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид $x = -\dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{3}{4}$.

Эти корни также удовлетворяют условиям $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ y - x^2 \geq 0. \end{cases}$

Ответ: $\{0; 0\}, \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right\}$.

Пример 9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y+1}} = 1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

Решение. ОДЗ системы: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Представим исходную систему в виде $\begin{cases} \sqrt{y+1} = 1 - \sqrt{x} \\ \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x+1} \end{cases}$.

Из первого уравнения системы следует, что $1 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, а из второго уравнения следует, что $1 - \sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Сопоставляя эти условия с ОДЗ, приходим к выводу, что $x = 0$.

Подставляя $x = 0$ в уравнения системы, получим, что и $y = 0$.

Ответ: $\{0; 0\}$.

7.2. Решение иррациональных неравенств

7.2.1. Применение теорем равносильных преобразований

Приведем две теоремы равносильных преобразований иррациональных неравенств.

Теорема 7.3

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ 0 \le f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Теорема 7.4

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Первый способ решения иррациональных неравенств основан на применении этих теорем.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x+2} < x + \frac{1}{2}$.

Решение. По теореме 7.3 имеем систему, которая легко решается.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} > 0 \\ 0 \le (x+2) < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \ge -2 \\ x + 2 < x^2 + x + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x^2 > \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x > \frac{\sqrt{7}}{2} \\ x < -\frac{\sqrt{7}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x \in \left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \infty\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \infty\right)$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x+2} > x + \frac{1}{2}$.

Решение. По теореме 7.4 имеем совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}<0\\ x+2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+\dfrac{1}{2}\ge 0\\ (x+2)>\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x<-\dfrac{1}{2}\\ \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ x^2<\dfrac{7}{4}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решение второй системы совокупности имеет вид

$$\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ x^2<\dfrac{7}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\ x<\dfrac{\sqrt{7}}{2}\\ x>-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x<\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

В совокупности с первым неравенством, получаем окончательное решение примера:

$$\left[\begin{array}{l}-2\le x<-\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{\sqrt{7}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow -2\le x<\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Ответ: $x\in\left[-2;\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

При решении более сложных неравенств, где приведенные теоремы применять трудно, можно придерживаться следующей схемы решения:

1) найти область определения заданного неравенства;

2) руководствуясь рассмотренными ранее в п. 2.3 главы 2 теоремами о равносильности неравенств, решить заданное неравенство;

3) из найденных решений отобрать значения переменной, принадлежащие области определения заданного неравенства.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}$.

Решение.

Шаг 1. Находим ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases}x-2\ge 0\\ 3-x\ge 0\\ x-1\ge 0\\ 6-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

Шаги 2–3. Левая часть исходного неравенства неотрицательна, а правая часть может иметь разные знаки. Рассмотрим два возможных случая:

а) $\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}\ge 0$, б) $\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}<0$.

В случае а) имеем систему

$$\text{а)}\begin{cases}2\le x\le 3\\ \sqrt{x-1}\ge\sqrt{6-x}\\ \left(\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}\right)^2>\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}\right)^2.\end{cases}$$

Здесь мы применили правило равносильного преобразования неравенства при возведении его обеих частей в квадрат при условии, что левая и правая части неравенства неотрицательны (теорема 2.7 главы 2).

В случае б) возводить в квадрат последнее неравенство нельзя, так как его правая часть отрицательна. Система в этом случае имеет вид

$$\text{б)}\begin{cases}2\le x\le 3\\ \sqrt{x-1}<\sqrt{6-x}\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}.\end{cases}$$

Заметим, что в области допустимых значений неравенства последнее неравенство выполняется всегда, так как положительная величина всегда больше отрицательной.

Итак, решаем первую систему:

$$\begin{cases}2\le x\le 3\\ \sqrt{x-1}\ge\sqrt{6-x}\\ \left(\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}\right)^2>\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le 3\\ x-1\ge 6-x\\ \left(\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}\right)^2>\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le 3\\ x\ge\dfrac{7}{2}\\ \left(\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}\right)^2>\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Система не имеет решения, так как области решений первых двух неравенств не пересекаются.

Решаем вторую систему:

$$\begin{cases}2\le x\le 3\\ \sqrt{x-1}<\sqrt{6-x}\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}>\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le 3\\ x<\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

Ответ: $x\in[2;3]$.

7.2.2. Решение иррациональных неравенств обобщенным методом интервалов

Рассмотрим другой способ решения иррациональных неравенств.

При решении иррациональных неравенств можно эффективно применять обобщенный метод интервалов, рассмотренный при решении рациональных неравенств (глава 5 раздел 5.2.1).

Рассмотрим иррациональное неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0.$

Решение этого неравенства данным методом проводим по следующей схеме:

1) определяем ОДЗ неравенства;

2) путем равносильного преобразования приводим исходное неравенство к системе вида $\begin{cases} R(x) = f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases};$

3) определяем все корни иррационального уравнения $R(x) = 0,$ что соответствует решению совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$

4) На оси OX наносим точки, соответствующие найденным корням уравнения, а также точки, определяющие границы ОДЗ исходного неравенства. При этом точки, соответствующие корням уравнения $g(x) = 0$, обозначаются на оси OX выколотыми. В результате ось OX разбивается на конечное число интервалов;

5) выбирая последовательно произвольным образом точки из каждого интервала, определяем знак функции $R(x)$;

6) объединяем в ответ задачи промежутки, на которых функция $R(x) \geq 0,$ исключая точки, в которых $g(x) = 0$.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{3\sqrt{x-3} - x + 1}{\sqrt{2x+2} - \sqrt{x-3} - 2} \leq 0.$

Решение.

1. Определяем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x + 2 \geq 0 \\ \sqrt{2x+2} - \sqrt{x-3} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -1 \\ \sqrt{2x+2} - \sqrt{x-3} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \sqrt{2x+2} - \sqrt{x-3} - 2 \neq 0. \end{cases}$$

2. Преобразуем неравенство к виду

$$\begin{cases} R(x) = \left(3\sqrt{x-3} - x + 1\right)\left(\sqrt{2x+2} - \sqrt{x-3} - 2\right) \leq 0 \\ \sqrt{2x+2} - \sqrt{x-3} - 2 \neq 0. \end{cases}$$

3. Определяем корни уравнения $R(x)=0$, для чего решаем совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3\sqrt{x-3}-x+1=0 \\ \sqrt{2x+2}-\sqrt{x-3}-2=0. \end{array}\right.$$

Решаем первое уравнение $3\sqrt{x-3}-x+1=0$.

ОДЗ этого уравнения: $x \ge 3$. Запишем его в виде $3\sqrt{x-3}=x-1$. Правая часть уравнения должна удовлетворять условию $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим

$$9x-27=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-11x+28=0.$$

Корнями данного уравнения будут значения $x_1=4; x_2=7$.

Оба корня удовлетворяют условиям $x\ge 1$ и $x\ge 3$.

Решаем второе уравнение $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x-3}-2=0$. ОДЗ данного уравнения: $x\ge 3$. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{2x+2}=\sqrt{x-3}+2$. Обе части уравнения неотрицательны. Возводим в квадрат обе его части:

$$2x+2=x+1+4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-3}=x+1.$$

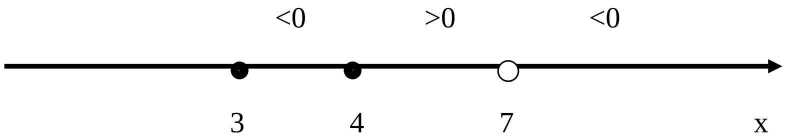
Правая часть уравнения должна удовлетворять условию $x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$.

Возводим обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$$16x-48=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-14x+49=0 \Leftrightarrow x=7.$$

Корень удовлетворяет условиям $x\ge -1$ и $x\ge 3$.

4. На оси OX наносим точки $x=3; x=4; x=7.$ При этом точка $x=7$ — выколотая.



5. а) Пусть $x=3,$ тогда

$$R(x)=\left(3\sqrt{x-3}-x+1\right)\left(\sqrt{2x+2}-\sqrt{x-3}-2\right)=R(3)=(-2)\left(\sqrt{8}-2\right)<0;$$

б) пусть x = 5, тогда $R(5)=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{2}-2\right)>0$;

в) пусть x = 12, тогда $R(12)=(-2)\left(\sqrt{26}-5\right)<0.$

6. Объединяем промежутки, в которых $R(x)\le 0,$ исключая точку $x=7,$ получим $x\in[3;4]\cup(7;\infty)$.

Ответ: $x\in[3;4]\cup(7;\infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\ge 1.$

1. ОДЗ неравенства: $\begin{cases} x\ge 0 \\ 2x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0.$

2. В данной задаче $R(x)=\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}-1.$

3. Определяем корни уравнения $R(x)=0$. Запишем уравнение в виде $\sqrt{3x}=\sqrt{2x+1}+1$. Обе части уравнения неотрицательны.

Возведем обе части уравнения в квадрат; получим

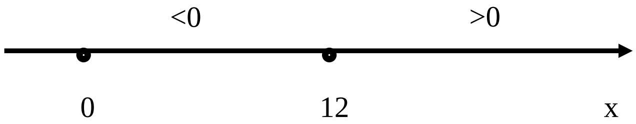
$$3x=2x+2+2\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x-2=2\sqrt{2x+1}.$$

Левая часть полученного уравнения должна быть неотрицательна. Тогда $x\geq 2$. Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$x^2-4x+4=8x+4\Leftrightarrow x^2-12x=0.$$

Корнями этого уравнения будут числа $x_1=0; x_2=12$. Двум условиям $x\geq 0; x\geq 2$ удовлетворяет только корень $x=12$, являющийся единственным корнем уравнения $R(x)=0$.

4. На оси OX наносим две точки: $x=0$ (граничная точка, полученная анализом ОДЗ) и $x=12$, разбивающие ось OX на три интервала.



5. Пусть $x=3$. Тогда $R(3)=2-\sqrt{7}<0$.

Пусть $x=27$. Тогда $R(27)=8-\sqrt{55}>0$.

6. Решение исходного неравенства соответствует промежутку $x\in[12;\infty)$.

Ответ: $x\in[12;\infty)$.

При решении следующего неравенства применим метод анализа знаков левой и правой частей.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{x+1}+1\leq 4x^2+\sqrt{3x}$.

Решение.

1. ОДЗ неравенства: $x\geq 0$.

2. $R(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}-4x^2+1$.

Решаем уравнение $R(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}-4x^2+1=0$.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}=4x^2-1$.

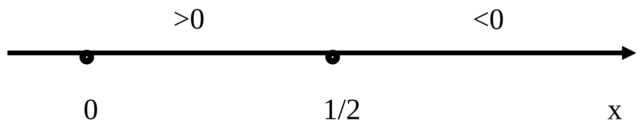
Обе части уравнения должны иметь одинаковые знаки, т. е.

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}\geq\sqrt{3x}\\ 4x^2-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 3x\\ 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\frac{1}{2}\\ x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

3. С учетом ОДЗ получаем, что корнем уравнения может быть только точка $x=\frac{1}{2}$. Подставляя это значение в исходное уравнение, убеждаемся, что $x=\frac{1}{2}$ действительно является его корнем.

4. Наносим на оси OX точки $x = 0$ (граничная точка ОДЗ) и $x = \frac{1}{2}$.



5. Пусть $x = 0.$ Тогда $R(0) = 2 > 0.$
Пусть $x = 3.$ Тогда $R(3) = -36 < 0.$

6. Решению исходного неравенства соответствует промежуток $x \in \left[\frac{1}{2};\infty\right).$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2};\infty\right).$

Часто при решении иррациональных неравенств необходимо произвести предварительные упрощения или осуществить введение новой неизвестной.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 0.$

Решение.

1. ОДЗ неравенства: $\frac{12x}{x-2} \ge 0.$ Решение этого неравенства имеет вид $x \in (-\infty;0] \bigcup (2;\infty).$

2. Введем новое неизвестное $t = \sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}, t \ge 0$. Неравенство запишется в виде $\frac{1}{2}t^4 - t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow t\left(t^3 - 2t - 4\right) = t\left(t-2\right)\left(t^2 + 2t + 2\right) > 0$.

Так как $t^2 + 2t + 2 > 0$ при всех t, то неравенство упрощается $t(t-2) > 0$ и его решение имеет вид $t \in (-\infty;0) \bigcup (2;\infty).$

С учетом условия $t \ge 0,$ получим $t \in (2;\infty).$

Производя обратную замену, получим неравенство $t = \sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}} > 2 \Leftrightarrow \frac{12x}{x-2} > 16 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} > \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{8-x}{x-2} > 0,$ решая которое, получим $x \in (2;8).$

3. Решением исходного неравенства будет решение системы, состоящей из последнего неравенства и неравенств, учитывающих ОДЗ:

$$\begin{cases} 2 < x < 8 \\ 2 < x < \infty \\ -\infty < x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;8).$$

Ответ: $x \in (2;8).$

В конце раздела рассмотрим использование свойств монотонности функций при решении иррациональных неравенств.

Пример 8. Решить неравенство $\sqrt{x+18} < 2 - x$.

Решение.

ОДЗ данного неравенства: $x \geq -18$. При $x = -2$ левая и правая части равны, но поскольку левая часть — возрастающая, а правая — убывающая функция, то неравенству удовлетворяют значения x, которые меньше (-2). С учетом ОДЗ получим ответ $-18 \leq x < -2$.

Ответ: $-18 \leq x < -2$.

ГЛАВА 8
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Решение задач на составление уравнений обычно осуществляется в три этапа:

1) выбор неизвестного (или нескольких неизвестных) и составление уравнений, связывающих некоторой зависимостью выбранные неизвестные с величинами, заданными условием задачи;

2) решение полученного уравнения (или системы уравнений);

3) отбор решений по смыслу задачи.

8.1. Задачи на движение объектов

При решении этих задач принимают следующие допущения:

а) если нет специальных оговорок, то движение считают равномерным;

б) скорость считается величиной положительной;

в) всякие переходы на новый режим движения, на новое направление движения считают происходящими мгновенно.

Основными параметрами равномерного движения являются: v — скорость движения, t — время движения со скоростью v, S — расстояние, проходимое за время t; причем $S = v \cdot t$.

При решении задач на движение объектов часто встречаются стандартные ситуации режимов движения, которые будем называть «шаблонами».

Рассмотрим некоторые из них.

8.1.1. Шаблон 1

Одновременное движение двух объектов навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 (рис. 8.1). Время $\bar{t}$, через которое произойдет их встреча определяется формулой

$$\boxed{\bar{t} = \frac{S}{v_2 + v_1}.}$$

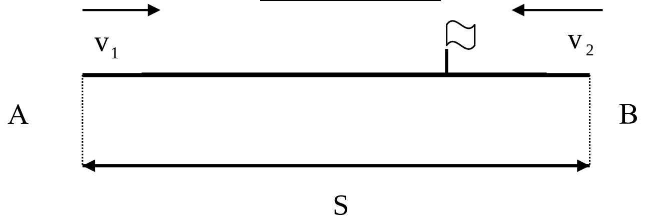


Рис. 8.1

Встречное движение объектов

8.1.2. Шаблон 2

Одновременное движение двух объектов в одном направлении со скоростями v_1 и v_2 соответственно (рис. 8.2). Пусть первоначальное расстояние между объектами равно S_0. Время $\bar{t}$, через которое второй объект догонит первый, если $v_2 > v_1$, равно

$$\boxed{\bar{t} = \frac{S_0}{v_2 - v_1}\ .}$$

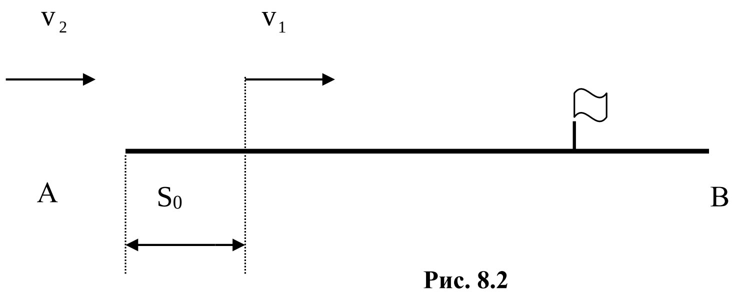


Рис. 8.2

Движение объектов в одном направлении

Если считать, что первый объект ранее начинал свое движение также из пункта А, то общее время его движения до встречи равно $\frac{S_0}{v_1} + \bar{t}$, а время движения второго объекта — $\bar{t}$.

8.1.3. Шаблон 3

В задачах на движение встречаются формулировки, связанные с понятием величины, обратной скорости движения.

Величина, обратная скорости движения объекта, равная $\frac{1}{v}$, определяет время прохождения объектом единицы расстояния.

$$\boxed{t = \frac{S}{v} = \frac{1}{v} \quad \text{при} \quad S = 1\ .}$$

8.1.4. Шаблон 4

Если две точки движутся по окружности радиусом R с постоянными скоростями v_1 и v_2 в разных направлениях, то время между их встречами равно

$$\boxed{\bar{t} = \frac{2\pi R}{v_1 + v_2},}$$

а если они движутся в одном направлении, причем $v_2 > v_1$, то время между их встречами равно

$$\boxed{\bar{t} = \frac{2\pi R}{v_2 - v_1}.}$$

Задача 1. Если велосипедист и мотоциклист поедут одновременно из двух пунктов навстречу друг другу, то они встретятся через 1 час 20 мин. Если они поедут одновременно в одном направлении, то мотоциклист догонит велосипедиста через 4 часа. Найти отношение скорости мотоциклиста к скорости велосипедиста.

Решение.

1. Обозначим x км/ч — скорость велосипедиста, а y км/ч — скорость мотоциклиста и S — расстояние между пунктами A и B. Для решения задачи можно применить шаблоны 1 и 2. Время, через которое встретятся объекты, при движении навстречу друг к другу, переведенное в часы, равно $\frac{4}{3}$ часа. Составим систему уравнений для двух направлений движения: $\begin{cases} \frac{4}{3} = \frac{S}{x+y} \\ 4 = \frac{S}{y-x}. \end{cases}$

2. Для решения системы разделим первое уравнение на второе.

$$\frac{1}{3} = \frac{y-x}{x+y} \Leftrightarrow \frac{\frac{y}{x}-1}{1+\frac{y}{x}}.$$

Обозначим $z = \frac{y}{x} > 0$. Тогда получим уравнение

$$\frac{1}{3} = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z+1 = 3z-3 \Leftrightarrow 2z = 4 \Leftrightarrow z = 2.$$

Ответ: $\frac{y}{x} = 2$.

Задача 2. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через 1 час после этого из A на мотоцикле выехал второй курьер, который нагнав первого и передав ему поручение, немедленно двинулся с той же скоростью обратно и возвратился в A тогда, когда первый достиг B. Найти скорость первого курьера, если скорость второго 50 км/час.

Решение.

1. Обозначим x км/ч — скорость первого курьера, $\bar{t}$ — время, через которое произойдет встреча курьеров после выезда второго, а S — расстояние от места их встречи до пункта B (рис. 8.3).

Для составления первого уравнения системы, можно применить шаблон 2. Тогда запишем $\bar{t} = \frac{x}{50-x}$. Очевидно, что первоначальное расстояние S_0 между курьерами равно $S_0 = x \cdot 1 = x$.

Время $\bar{t}$, за которое второй курьер проедет расстояние до встречи, можно определить также по формуле $\bar{t} = \frac{120-S}{50}$.

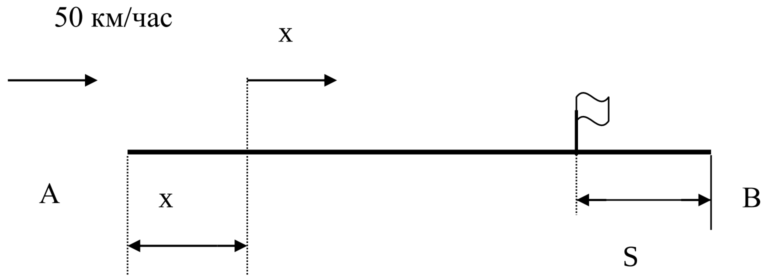


Рис. 8.3

Схема движения объектов в задаче 2

И, наконец, поскольку за то же время $\bar{t}$ второй курьер вернулся обратно в пункт А, а первый добрался до пункта В, получим третье уравнение в задаче $\bar{t} = \frac{S}{x}$.

Система уравнений для решения данной задачи имеет вид

$$\begin{cases} \bar{t} = \dfrac{x}{50-x} \\ \bar{t} = \dfrac{120-S}{50} \\ \bar{t} = \dfrac{S}{x}. \end{cases}$$

2. Приравняем второе и третье уравнения системы:

$$\frac{120-S}{50} = \frac{S}{x} \Leftrightarrow x = \frac{50 \cdot S}{120-S}.$$

Далее, приравняем первое и третье уравнения системы:

$$\frac{x}{50-x} = \frac{S}{x} \Leftrightarrow S = \frac{x^2}{50-x}.$$

Далее, исключим S из полученных выше соотношений:

$$x = \frac{50\left(\dfrac{x^2}{50-x}\right)}{120-\left(\dfrac{x^2}{50-x}\right)}.$$

После упрощений запишем $(0 < x < 50)$, что

$$x = \frac{50x^2}{6000-120x-x^2} \Leftrightarrow 6000x - 120x^2 - x^3 = 50x^2 \Leftrightarrow x\left(x^2 + 170x - 6000\right) = 0.$$

Решая уравнение, получим $x_1 = 30$, $x_2 = -200$ и $x_3 = 0$.

3) По смыслу задачи подходит только одно значение корня x = 30 км/ч.

Ответ: 30 км/ч.

Задача 3. Из пункта А в пункт В через равные промежутки времени отправляются три автомашины. Они прибывают в пункт В одновременно, затем выезжают из В в пункт С, находящийся от В на расстоянии 120 км. Первая машина прибывает через 1 час после второй, третья, прибыв в С, поворачивает обратно и в 40 км от С встречает первую.

Определить скорость первой машины.

Решение.

1) Обозначим x км/ч — скорость первой автомашины; y км/ч — скорость второй автомашины; z км/ч — скорость третьей автомашины; t_0 ч — время, через которое автомашины встретятся в пункте В, считая от момента выезда третьей автомашины; t^* ч — интервал времени, через который выезжают автомашины (рис. 8.4).

Для решения задачи можно применить шаблон 2.

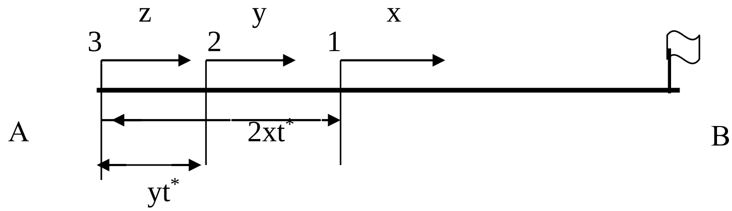


Рис. 8.4

Схема движения объектов в задаче 3

Тогда запишем следующие уравнения:

$$t_0 = \frac{yt^*}{z-y},\ t_0 = \frac{2xt^*}{z-x},$$

где yt^*, $2xt^*$ — соответственно первоначальные расстояния между второй и третьей, первой и третьей автомашинами.

Приравнивая между собой эти уравнения, получим

$$\frac{yt^*}{z-y} = \frac{2xt^*}{z-x} \Leftrightarrow zy - xy = 2xz - 2xy \Leftrightarrow zy + xy = 2xz \Leftrightarrow y = \frac{2xz}{z+x}.$$

Времена движения автомашин от пункта В до пункта С соответственно составляют $t_1 = 120/x$; $t_2 = 120/y$; $t_3 = 120/z$.

Из условия следует, что $t_1 - t_2 = 1$, т. е. $120\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 1$.

Время движения первой автомашины до встречи с третьей автомашиной в 80 км от пункта В составляет $\frac{80}{x}$, а тоже время движения третьей автомашины до встречи с первой автомашиной в 40 км от пункта С составляет $\frac{160}{z}$. Получим еще одно уравнение $\frac{80}{x} = \frac{160}{z}$.

В результате запишем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{2xz}{x+z} \\ 120\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) = 1 \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{z}. \end{cases}$$

2) Выразим x из последнего уравнения, получим $x = \frac{z}{2}$ и подставим вместо x в первое и второе уравнения. Получим $y = \frac{2z}{3}$ и $120\left(\frac{2}{z} - \frac{3}{2z}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{60}{z} = 1 \Leftrightarrow z = 60.$ Тогда x = 30 км/ч.

Ответ: x = 30 км/ч.

Задача 4. Часовая и минутная стрелки совпадают в полночь, и начинается новый день. В котором часу нового дня впервые снова совпадут часовая и минутная стрелки?

Решение.

Обозначим x об/ч — скорость часовой стрелки, y об/ч — скорость минутной стрелки, t_0 — время их первой встречи. Для решения задачи применим шаблон 4.

Запишем уравнение $t_0 = \frac{1}{y-x}$. Очевидно, что $x = \frac{1}{12}$, $y = 1$.

Тогда $t_0 = \dfrac{1}{1-\frac{1}{12}} = \dfrac{12}{11}$ часа.

Можно также записать, что $\frac{12}{11} = 1\frac{1}{11} = 1$ час$\frac{60}{11}$ мин.

Ответ: 1 час$\frac{60}{11}$ мин.

Иногда для решения задачи приходится вводить больше неизвестных, чем число уравнений, которые можно составить.

Однако если определять не все эти неизвестные, а только те, которые требуются по условию задачи, ее решение может быть получено.

Задача 5. Из Москвы в Петербург и из Петербурга в Москву одновременно отправились два поезда. Когда первый прошел половину пути, второму оставалось 400 км. Когда второй прошел половину пути, первому оставалось 250 км. Найти расстояние между Москвой и Петербургом.

Решение

1. Обозначим x км/ч — скорость первого поезда, y км/ч — скорость второго поезда, S км — расстояние между городами.

Время, за которое первый поезд прошел половину пути, равно $\frac{S}{2x}$, а за это же время второй поезд прошел путь, равный $S-400$. Тогда получим первое уравнение $\frac{S}{2x}=\frac{S-400}{y}$. Аналогично запишем второе уравнение в задаче. $\frac{S}{2y}=\frac{S-250}{x}$. Получим систему уравнений $\begin{cases}\frac{S}{2x}=\frac{S-400}{y}\\ \frac{S}{2y}=\frac{S-250}{x}.\end{cases}$

Мы использовали все условия данной задачи, получили в двух уравнениях три неизвестных. Такую систему однозначно решить нельзя. Но если вспомнить, что скорости поездов определять не требуется, то задача все же может быть решена.

2. Перемножим уравнения системы, получим

$$\frac{S^2}{4}=(S-400)(S-250)\Leftrightarrow S^2=4S^2-2600S+400000.$$

Или имеем квадратное уравнение $3S^2-2600S+400000=0$. Решая его, получим два корня $S_1=\frac{2000}{3};S_2=200.$

3. По смыслу задачи подходит только величина $S=\frac{2000}{3}$ км, так искомое расстояние уже по условию не может быть меньше 250 км.

Ответ: $S=\frac{2000}{3}$ км.

8.2. Задачи на совместную работу

Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему.

Некоторую работу A за время T выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно (т. е. с постоянной для каждого из них производительностью). При этом необходимо уметь учитывать фактор совместной работы в виде записи соответствующего уравнения.

Если t_1 — время выполнения работы A одним человеком (или механизмом), t_2 — время выполнения работы A вторым человеком (или механизмом), то величины $V_1=\frac{A}{t_1}$ и $V_2=\frac{A}{t_2}$ соответственно определяют производительности выполнения работы A каждым человеком (механизмом). По смыслу эти величины определяют часть работы A, выполняемой каждым — за единицу времени. Тогда величина, равная сумме $V=\left(\frac{A}{t_1}+\frac{A}{t_2}\right)$ — определяет часть совместной работы, выполненной за единицу времени.

Но совместная работа продолжалась время T и за это время была выполнена вся работа A. Тогда можно записать, что

$$\left(\frac{A}{t_1}+\frac{A}{t_2}\right)\cdot T = A \Leftrightarrow \left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\cdot T = 1.$$

Определим следующий шаблон для этого типа задач:

Шаблон 5.

$$\boxed{\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\cdot T = 1.}$$

Заметим, что если совместно выполнена работа A_1, составляющая только часть работы A, то приведенное выражение примет вид

$$\boxed{\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\cdot T = \frac{A_1}{A}.}$$

Задача 6. При совместной работе двух бригад шахтеров за 1 ч 03 мин было добыто 150 т угля. Сколько потребуется времени первой бригаде для добычи 100 т угля, если она может добыть 150 т угля на 2 часа быстрее второй?

Решение.

1. Обозначим x ч — время, необходимое первой бригаде для добычи 150 т угля, а y ч — время, необходимое второй бригаде для добычи 150 т угля. Тогда можно записать, что $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{63}{60}=1$. По условию задачи $y = x+2$. Получим систему уравнений $\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{60}{63}.\\ y=x+2\end{cases}$

2. Подставим в первое уравнение $y = x+2$.

Тогда $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}=\frac{60}{63}$. После упрощений получим квадратное уравнение $\frac{2x+2}{x(x+2)}=\frac{60}{63}\Leftrightarrow 10x^2 - x - 21 = 0$.

Корни этого уравнения $x_1=\frac{3}{2}; x_2=-\frac{7}{5}$. По смыслу задачи подходит только корень $x=\frac{3}{2}$.

Таким образом, за время $x=\frac{3}{2}$ часа первая бригада добудет 150 т угля. Очевидно, что для добычи 100 т угля первой бригаде необходимо время, равное $\frac{3}{2}\cdot\frac{100}{150}=1$ час.

Ответ: 1 час.

Задача 7. Ученик токаря вытачивает шахматные пешки для определенного числа комплектов шахмат. Он хочет научиться изготовлять ежедневно на 2 пешки больше, чем теперь; тогда такое же задание он выполнит на 10 дней быстрее. Если бы ему удалось научиться изготовлять ежедневно на 4 пешки больше, чем теперь, то срок выполнения такого же задания уменьшился бы на 16 дней. Сколько комплектов шахмат обеспечивает пешками этот токарь, если для каждого комплекта нужно 16 пешек?

Решение.

1. Пусть x — число пешек, вытачиваемых токарем за один день, t — количество дней, за которое токарь выполняет задание. Тогда xt – число пешек, которые токарь вытачивает, выполняя задание.

По условию задачи $xt = (x+2)(t-10)$, а также $xt = (x+4)(t-16)$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} xt = (x+2)(t-10) \\ xt = (x+4)(t-16). \end{cases}$$

2. После упрощений запишем $\begin{cases} 0 = 2t - 10x - 20 \\ 0 = 4t - 16x - 64. \end{cases}$ Решая данную систему, получим x = 6, t = 40. Откуда, общее число пешек, вытачиваемых токарем, равно $xt = 240$. Число комплектов шахмат равно $\frac{240}{16} = 15$.

Ответ: 15.

8.3. Задачи на смеси и сплавы. Задачи, связанные с понятием процента

Решение этих задач основано на понимании таких основных определений, как «концентрация» и «процентное содержание».

Если смесь (сплав, раствор) массы m состоит из веществ A, B, C, (которые имеют массы соответственно m_A, m_B, m_C), то величины

$$\boxed{k_A = \frac{m_A}{m}; k_B = \frac{m_B}{m}; k_C = \frac{m_C}{m}}$$

называются соответственно концентрацией веществ A, B, C в смеси. Очевидно, что $k_A + k_B + k_C = 1$. Величины

$$\boxed{\begin{aligned} p_A &= k_A \cdot 100\%; \\ p_B &= k_B \cdot 100\%; \\ p_C &= k_C \cdot 100\% \end{aligned}}$$

называются соответственно процентным содержанием веществ A, B, C в смеси. Очевидно, что $p_A + p_B + p_C = 100\%$.

Задача 8. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

Решение.

1. Определим первоначальное состояние сплава.

Процентное содержание меди равно $45 = \frac{m_М}{36}100$, где $m_М$ — масса меди в сплаве.

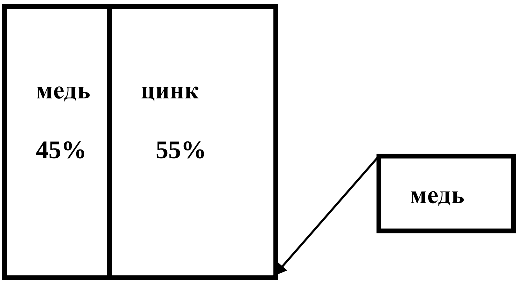


Рис. 8.5

Добавление меди к первоначальному сплаву

Процентное содержание цинка равно $55 = \frac{m_Ц}{36}100$, где $m_Ц$ — масса цинка в сплаве. Определим состояние сплава после добавления к нему x кг меди (рис. 8.5).

Процентное содержание меди равно $60 = \frac{m_М + x}{36 + x}100$, процентное содержание цинка соответствует $40 = \frac{m_Ц}{36 + x}100$.

2. Для определения x можно использовать любое из полученных уравнений.

Рассмотрим второе уравнение. При этом из начального состояния находим, что $m_Ц = \frac{55 \cdot 36}{100} = \frac{99}{5}$.

Тогда $40 = \frac{m_Ц}{36 + x}100 \Leftrightarrow 1440 + 40x = \frac{99}{5}100 \Leftrightarrow 40x = 540 \Leftrightarrow x = 13{,}5$.

Ответ: $13{,}5$ кг.

Задача 9. Чтобы уменьшить концентрацию соли на 20% в сосуд с раствором нужно добавить 2 кг воды, а чтобы увеличить концентрацию соли на 10% в этот сосуд нужно насыпать 0,5 кг соли. Определите массу раствора.

Решение.

1. Пусть x кг — масса раствора; y% — процентное содержание соли. Тогда $y - 20 = \frac{x_{соли}}{x + 2}100$, где $x_{соли} = \frac{xy}{100}$ или $y - 20 = \frac{xy}{x + 2}$. После упрощений получим $2y - 20x = 40$.

Также имеем $y + 10 = \frac{x_{соли} + 0{,}5}{x + 0{,}5}100 = \frac{xy + 50}{x + 0{,}5}$. После упрощений получим $10x + 0{,}5y = 45$.

2. Решение системы
$\begin{cases} 10x + 0{,}5y = 45 \\ -20x + 2y = 40 \end{cases}$ имеет вид $x = \frac{7}{3}; y = \frac{130}{3}$.

Искомая масса раствора равна $x = \frac{7}{3}$ кг.

Задача 10. Сплавили два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество сортов, то сплав будет содержать 8% хрома. Определить процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна.

Решение.

1. Обозначим p_1 — процентное содержание хрома в чугуне первого сорта, p_2 — процентное содержание хрома в чугуне второго сорта.

По условию $p_1 = \frac{m_1}{m}100$ и $p_2 = \frac{m_2}{5m}100$, где $m_1; m_2$ — массы хрома в кусках чугуна соответственно с массами m и $5m$. Очевидно, что

$$m_1 = \frac{p_1 m}{100}; m_2 = \frac{5p_2 m}{100}.$$

Из условия также следует, что в новом сплаве процентное содержание хрома $p_3 = 2p_1$. Причем $p_3 = \frac{m_1 + m_2}{6m}100 = \frac{p_1 + 5p_2}{6} = 2p_1 \Leftrightarrow 5p_2 = 11p_1$.

По условию также имеем, что $p_1 = \frac{m_1^*}{m^*}100, p_2 = \frac{m_2^*}{m^*}100$, где $m_1^*; m_2^*$ — массы хрома в кусках чугуна соответственно с равными массами m^*. Очевидно, что $m_1^* = \frac{p_1 m^*}{100}; m_2^* = \frac{p_2 m^*}{100}$.

Из условия следует, что в новом сплаве процентное содержание хрома равно 8%. Тогда получим уравнение

$$8 = \frac{m_1^* + m_2^*}{2m^*}100 = \frac{p_1 + p_2}{2} = 8 \Leftrightarrow p_1 + p_2 = 16.$$

2. Итак, получили систему уравнений

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 16 \\ 5p_2 = 11p_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 5 \\ p_2 = 11. \end{cases}$$

Ответ: 5%; 11%.

В задачах, подобной ниже, за 100% всегда принимается величина с которой производится сравнение.

Задача 11. Моторная лодка прошла по озеру, а потом поднялась вверх по реке, впадающей в озеро. Скорость движения лодки по озеру на 4% больше, чем скорость движения лодки вверх по реке, а время движения лодки по озеру оказалось на 15% больше времени движения лодки по реке. На сколько процентов путь по озеру больше пути по реке?

Решение.

Пусть x — скорость движения лодки по реке, а t — время движения лодки по реке. Тогда $1{,}04x$ — скорость движения лодки по озеру (за 100% принимается x), $1{,}15t$ — время движения лодки по озеру (за 100% принимается t). Путь, пройденный лодкой по реке, $S_1 = xt$, а путь, пройденный лодкой по озеру составляет $S_2 = 1{,}196xt$. Следовательно, путь по озеру на $\frac{S_2 - S_1}{S_1}100\% = \frac{0.196xt}{xt}100\% = 19{,}6\%$ больше пути по реке (путь S_1 по реке принимается за 100%).

Ответ: $19{,}6\%$.

Задача 12. Число 512 трижды увеличивали на $a\%$, а затем трижды уменьшали на $a\%$. В результате получилось число, равное 216. Найти a.

Решение.

1. Если число A увеличить на $a\%$, то получится число, равное $A_1 = A\left(1 + \frac{a}{100}\right)$. Если же число A уменьшить на $a\%$, то получится число, равное $A_1 = A\left(1 - \frac{a}{100}\right)$.

Если число $A\left(1 + \frac{a}{100}\right)$ увеличить второй раз на $a\%$, то получится число $A_2 = A\left(1 + \frac{a}{100}\right) + \frac{a}{100}A\left(1 + \frac{a}{100}\right) = A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2$.

Если число $A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2$ увеличить третий раз на $a\%$, то получится число $A_3 = A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2 + \frac{a}{100}A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^2 = A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^3$. Полученная формула носит название формулы определения сложного процента.

Полученную сумму $A^* = A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^3$ уменьшали три раза на $a\%$. Аналогично, после третьего уменьшения получим величину $A_3^* = A^*\left(1 - \frac{a}{100}\right)^3 = 216.$

В результате имеем уравнение $A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^3\left(1 - \frac{a}{100}\right)^3 = 216$, учитывая, что по условию A = 512, запишем $\left(1 + \frac{a}{100}\right)^3\left(1 - \frac{a}{100}\right)^3 = \frac{216}{512}$.

2. Извлекая из обеих частей корень третьей степени, получим уравнение $\left(1-\frac{a^2}{100^2}\right)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{a^2}{100^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a^2=\frac{100^2}{4}\Leftrightarrow a=\pm 50.$

3. По смыслу задачи подходит значение $a=50\%$.

Ответ: $a=50\%$.

8.4. Задачи на числовые зависимости

При решении задач на числовые зависимости могут оказаться полезными следующие сведения:

1. Если неотрицательное целое десятичное число A имеет n знаков, то

$$A=a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0,$$

где $a_0,a_1,\ldots a_{n-1}$ — цифры, выражающие соответственно количество единиц, десятков, сотен, … в числе A, принимающие значения 0, 1, 2,…, 9.

Так, например, неотрицательное целое двузначное число можно представить в виде $A=10x+y$, где y — число единиц, x — число десятков.

2. Если к числу A справа приписать цифру B, то получится число, равное $10A+B$. Если же от числа A отбросить справа последнюю цифру B, то получится число C, равное $C=\frac{A-B}{10}$.

3. Двузначное число $10x+y$, записанное теми же цифрами, взятыми в обратном порядке имеет вид $10y+x$.

4. Если при делении целого числа A на натуральное число B в частном получается q, а в остатке r ($0\le r<B$), то $A=B\cdot q+r$.

Задача 13. Найти двузначное число, если известно, что единиц в нем на 2 больше, чем десятков, и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Решение.

1. Пусть в искомом числе x единиц. Тогда в нем $(x-2)$ десятков, а, следовательно, оно равно $(x-2)10+x=11x-20$. Сумма цифр искомого числа равна $(x-2)+x=2x-2$. Таким образом, получаем следующее уравнение: $(11x-20)(2x-2)=144$.

2. Это уравнение имеет два корня $x_1=4; x_2=\frac{13}{11}$.

3. Так как x и (x – 2) — это цифры числа, то $\begin{cases}0\le x\le 9\\ 0\le x-2\le 9.\end{cases}$

Из найденных значений x этим условиям удовлетворяет только значение x = 4. Тогда искомое число равно 24.

Ответ: 24.

Задача 14. Найти два двузначных числа, о которых известно следующее: если к первому числу приписать справа второе число, а затем еще цифру 0, то получится пятизначное число, которое при делении на квадрат второго числа дает в частном 39, а в остатке 575; если же к первому числу приписать справа второе и затем из составленного таким образом числа вычесть другое число, полученное приписыванием справа первого числа ко второму, то разность будет равна 1287.

Решение.

1. Пусть x — первое число, а y — второе число. После приписывания справа числа y к числу x получится четырехзначное число $100x + y$, после приписывания к этому числу справа цифры 0 получится $10(100x + y) + 0.$ Так как при делении этого числа на число y^2 в частном получится 39 и в остатке 575, то $10(100x + y) = 39y^2 + 575.$ Это первое уравнение в задаче.

После приписывания справа двузначного числа x к двузначному числу y получится четырехзначное число $100y + x.$

Таким образом, получаем второе уравнение:

$$(100x + y) - (100y + x) = 1287.$$

Итак, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 1000x + 10y = 39y^2 + 575 \\ 99x - 99y = 1287. \end{cases}$$

2. Эта система имеет два решения $\{48;35\};\left\{\frac{152}{39};-\frac{355}{39}\right\}.$

3. По смыслу задачи x и y — натуральные числа, причем $10 \le x \le 99$ и $10 \le y \le 99$. Из найденных решений этим условиям удовлетворяет только первое решение — числа 48 и 35.

Ответ: 48 и 35.

Так как количество цифр ограничено, то решение ряда задач основано на конечном их переборе, удовлетворяющем условию задачи.

Задача 15. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти это число.

Решение.

1. Пусть $100x + 10y + 2$ — первоначальное число. Полученное число можно записать в виде $200 + 10x + y$. Получим уравнение

$$(200 + 10x + y) - (100x + 10y + 2) = 18 \Leftrightarrow 10x + y = 20.$$

2. Так как $0 \le x \le 9$ и $0 \le y \le 9$, то уравнению $10x + y = 20$ удовлетворяет только пара чисел $x = 2$ и $y = 0$. Искомое число равно 202.

Ответ: 202.

ГЛАВА 9
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

9.1. Арифметическая прогрессия

Определение 9.1

Арифметическая прогрессия — числовая последовательность, $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *каждый член которой* (*начиная со второго*) *равен предыдущему ее члену, сложенному с постоянным для данной последовательности числом* d*, называемым* ***разностью*** *арифметической прогрессии,* $a_n = a_{n-1} + d$*, где* $n \geq 2$.

Например, числа 3, 7, 11, 15, 19, … образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 4.

Приведем основные формулы, необходимые для решения задач.

9.1.1. Член с номером n (общий член последовательности) арифметической прогрессии равен

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ где } n = 1,2,3,\ldots.}$$

Пусть имеется конечная арифметическая прогрессия, состоящая из n членов.

9.1.2. Сумма S_k первых k членов арифметической прогрессии равна

$$\boxed{S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \frac{a_1 + a_k}{2}k,\ k = 1,2,\ldots,n.}$$

С учетом 9.1.1 эту формулу записывают также в виде

$$\boxed{S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \frac{2a_1 + (k-1)d}{2}k, k = 1,2,\ldots,n.}$$

9.1.3. В ряде задач полезной оказывается формула для суммы S_k^* последних k членов арифметической прогрессии. Эту формулу можно получить из предыдущих формул, если подсчитывать сумму последних k членов, начиная с последнего члена прогрессии a_n, рассматривая его в формулах как первый член, а член a_{n-1} — как второй и т. д. Очевидно, что при этом разность такой прогрессии $d^* = -d$. Тогда $S_k^* = \dfrac{2a_n - (k-1)d}{2}k$. Учитывая, что $a_n = a_1 + (n-1)d$, получим

$$S_k^* = \frac{2(a_1 + (n-1)d) - (k-1)d}{2}k = \frac{2a_1 + d(2n-k-1)}{2}k.$$

Таким образом,

$$\boxed{S_k^* = \frac{2a_1 + d(2n-k-1)}{2}k,\ k = 1,2,\ldots,n.}$$

9.1.4. Характеристическое свойство арифметической прогрессии.

Последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого, равен среднему арифметическому своих соседних членов, т. е.

$$\boxed{a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}, k = 2, 3, ...}$$

9.2. Геометрическая прогрессия

Определение 9.2

Геометрическая прогрессия — числовая последовательность $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ *первый член которой* $b_1 \neq 0$*, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для данной последовательности число* $q \neq 0$*, называемое* ***знаменателем*** *геометрической прогрессии,* $b_n = b_{n-1} \cdot q$, где $n \geq 2$.

Например, числа 2, 8, 32, 128, … — образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 4.

Приведем основные формулы необходимые для решения задач.

9.2.1. Член с номером n (общий член последовательности) геометрической прогрессии равен

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \text{ где } n = 1, 2, ...}$$

Пусть имеется конечная геометрическая прогрессия, состоящая из n членов.

9.2.2. Сумма S_k первых k членов геометрической прогрессии равна

$S_k = \dfrac{b_1(q^k - 1)}{q - 1}$,	если $q \neq 1$, $k = 1, 2, ..., n.$
$S_k = b_1 \cdot k$,	если $q = 1$, $k = 1, 2, ..., n.$

9.2.3. В ряде задач полезной оказывается формула для суммы S_k^* последних k членов геометрической прогрессии. Эту формулу можно получить из предыдущих формул, если подсчитывать сумму последних k членов, начиная с последнего члена прогрессии b_n, рассматривая его в формулах как первый член, а член b_{n-1} — как второй и т. д. Очевидно, что при этом знаменатель такой прогрессии $q^* = \dfrac{1}{q}$. Тогда

$$\boxed{S_k^* = \frac{b_1 q^{n-k}(q^k - 1)}{q - 1}, k = 1, 2, ..., n.}$$

9.2.4.

Определение 9.3

Геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, ... b_n ...$ *называется бесконечно убывающей, если ее знаменатель* q *удовлетворяет неравенству* $|q| < 1$.

Число членов такой прогрессии бесконечно большое, т. е. $n \to \infty$ и при этом каждый последующий член по модулю меньше предыдущего.

Например, числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ — образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q, равным $\frac{1}{2}$.

Сумма $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}.}$$

9.2.5. Характеристическое свойство геометрической прогрессии.

Последовательность $b_1, b_2, .. b_n, \ldots$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, кроме первого, равен произведению своих соседних членов, т. е.

$$\boxed{b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}, k = 2,3,\ldots}$$

9.3. Решение задач на прогрессии

Задача 1. В арифметической прогрессии отношение суммы первых семи членов к сумме последних семи равно $-0{,}2$, а отношение суммы всех членов без первых двух к сумме всех членов без последних двух равно 3. Найдите число членов арифметической прогрессии.

Решение.

В соответствии с 9.1.2 сумма S_7 первых семи членов арифметической прогрессии равна $S_7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} 7 = (a_1 + 3d)7.$

В соответствии с 9.1.3 сумма S_7^* последних семи членов арифметической прогрессии равна

$$S_7^* = \frac{2a_1 + d(2n-8)}{2} 7 = (a_1 + nd - 4d)7.$$

Тогда

$$\frac{S_7}{S_7^*} = \frac{a_1 + 3d}{a_1 + nd - 4d} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5a_1 + 15d = -a_1 - nd + 4d \Leftrightarrow 6a_1 + 11d + nd = 0.$$

По условию задачи $\frac{S - (a_1 + a_2)}{S - (a_{n-1} + a_n)} = 3$, где S — сумма всех членов прогрессии. Последнее выражение запишем в виде

$$S - a_1 - a_2 = 3S - 3a_{n-1} - 3a_n \Leftrightarrow 2S = 3a_{n-1} + 3a_n - a_1 - a_2.$$

Выражая сумму S прогрессии с учетом 9.1.2 и члены прогрессии через a_1 и d, получим, что

$$(2a_1 + (n-1)d)n = 3(a_1 + (n-2)d) + 3(a_1 + (n-1)d) - 2a_1 - d \text{ или}$$

$$2a_1 n + n^2 d - nd - 3a_1 - 3nd + 6d - 3a_1 - 3nd + 2a_1 + 4d = 0.$$

После приведения подобных членов запишем

$$n^2 d - 7nd + 2a_1 n - 4a_1 + 10d = 0.$$

В результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} n^2d - 7nd + 2a_1n - 4a_1 + 10d = 0 \\ 6a_1 + nd + 11d = 0. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения a_1 и подставляя в первое уравнение, получим уравнение для нахождения n.

$$\begin{cases} n^2d - 7nd - \dfrac{n^2d + 11nd}{3} + \dfrac{2nd + 22d}{3} + 10d = 0 \\ a_1 = -\dfrac{nd + 11d}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(2n^2 - 30n + 52) = 0 \\ a_1 = -\dfrac{nd + 11d}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d\left(n^2 - 15n + 26\right) = 0 \\ a_1 = -\dfrac{nd + 11d}{6}. \end{cases}$$

Так как $d \neq 0$, то $n^2 - 15n + 26 = 0$. Корнями данного уравнения будут числа $n_1 = 13; n_2 = 2$. По смыслу задачи подходит только корень n = 13.

Ответ: $n = 13$.

Характеристические свойства прогрессий позволяют быстро составить необходимые уравнения, позволяющие решить задачу.

После составления соответствующих уравнений удобно уменьшать количество неизвестных в уравнениях путем выражения членов прогрессий через b_1 и q для геометрической прогрессии и через a_1 и d для арифметической прогрессии.

Задача 2. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

Решение. Пусть числа b_1, b_2, b_3 образуют геометрическую прогрессию. Тогда числа $b_1, b_2 + 2, b_3$ образуют арифметическую прогрессию. И, наконец, числа $b_1, b_2 + 2, b_3 + 9$ снова образуют геометрическую прогрессию. Применяя характеристические свойства прогрессий, получим систему уравнений

$$\begin{cases} b_2 + 2 = \dfrac{b_1 + b_3}{2} \\ (b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9). \end{cases}$$

Выразим члены прогрессий b_2 и b_3 через b_1 и q.

$$\begin{cases} b_1q + 2 = \dfrac{b_1 + b_1q^2}{2} \\ (b_1q + 2)^2 = b_1(b_1q^2 + 9). \end{cases}$$

В результате получили систему двух уравнений с двумя неизвестными. Для решения системы возведем левую часть второго уравнения в квадрат, получим

$$b_1^2q^2 + 4b_1q + 4 = b_1^2q^2 + 9b_1 \Leftrightarrow 4b_1q + 4 - 9b_1 = 0.$$

Откуда следует, что

$$q=\frac{9b_1-4}{4b_1}. \qquad (*)$$

Подставляя q в первое уравнение, запишем

$\frac{9b_1-4}{4}+2=\frac{b_1+b_1\left(\frac{9b_1-4}{4b_1}\right)^2}{2}$. Упрощая данное уравнение, получим

$$9b_1+4=2b_1+\frac{(9b_1-4)^2}{8b_1}\Leftrightarrow 9b_1+4=2b_1+\frac{81b_1^2-72b_1+16}{8b_1}=$$

$$=72b_1^2+32b_1=16b_1^2+81b_1^2-72b_1+16\Leftrightarrow 25b_1^2-104b_1+16=0.$$

Решая квадратное уравнение, получим корни $b_1=4; b_1=\frac{4}{25}$.

Из (*) находим соответствующие значения знаменателя прогрессии $q_1=2$ и $q_2=-4$. Отсюда получим две геометрические прогрессии, удовлетворяющие условию задачи:

$$b_1=4; b_2=8; b_3=16 \text{ или } b_1=\frac{4}{25}; b_2=-\frac{16}{25}; b_3=\frac{64}{25}.$$

Ответ: $b_1=4; b_2=8; b_3=16$ или $b_1=\frac{4}{25}; b_2=-\frac{16}{25}; b_3=\frac{64}{25}$.

Задача 3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов первых n членов равна сумме первых 2n членов, а сумма кубов первых n членов в 3 раза меньше суммы первых 3n членов.

Решение. Обозначим S_n — сумму квадратов первых n членов, S_{2n} — сумму первых 2n членов, S_n^* — сумму кубов первых n членов, S_{3n} — сумму кубов первых 3n членов. Тогда по условию имеем: $S_n=S_{2n}$ и $3S_n^*=S_{3n}$.

Раскроем содержание входящих сумм:

$$S_n=b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2=b_1^2+b_1^2q^2+b_1^2q^4+\ldots+b_1^2q^{2n-2}=$$

$$=\frac{b_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1}$$ (знаменатель этой прогрессии равен q^2).

$$S_{2n}=b_1+b_2+\ldots b_{2n}=\frac{b_1(q^{2n}-1)}{q-1}.$$

Приравнивая суммы, получим $\frac{b_1}{q+1}=1\Leftrightarrow b_1=q+1$.

Аналогично, $3S_n^*=3(b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3)=3(b_1^3+b_1^3q^3+b_1^3q^6+\ldots+b_1^3q^{3n-3})=$

$=\frac{3b_1^3(q^{3n}-1)}{q^3-1}$ (знаменатель этой прогрессии равен q^3).

$$S_{3n}=b_1+b_2+\ldots b_{3n}=\frac{b_1(q^{3n}-1)}{q-1}.$$

Приравнивая суммы, получим $\dfrac{3b_1^2}{q^2+q+1}=1 \Leftrightarrow 3b_1^2=q^2+q+1.$

В результате получим систему уравнений $\begin{cases} b_1=q+1 \\ 3b_1^2=q^2+q+1. \end{cases}$

Подставим первое уравнение во второе:

$$3q^2+6q+3=q^2+q+1 \Leftrightarrow 2q^2+5q+2=0.$$

Корнями данного уравнения будут числа $q_1=-2$ и $q_2=-\dfrac{1}{2}$.

Так как по условию задана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то $|q|<1$ и подходит только корень $q=-\dfrac{1}{2}$. Находим, что $b_1=q+1=\dfrac{1}{2}.$

Искомая сумма равна $S=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}.$

Ответ: $\dfrac{1}{3}.$

Задача 4. Обратить периодическую дробь 97,(88) в обыкновенную.

Решение. Представим периодическую дробь в виде $97,(88)=97+(0{,}88+0{,}0088+0{,}000088+\ldots)$. Выражение, стоящее в скобках представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q, равным 0,01. Сумма этой прогрессии равна $S=\dfrac{0{,}88}{1-0{,}01}=\dfrac{0{,}88}{0{,}99}=\dfrac{8}{9}$. Тогда $97,(88)=97+\dfrac{8}{9}=\dfrac{881}{9}.$

Заметим, что эту задачу также можно решить без привлечения прогрессии. Обозначим $97,(88)=x.$ Тогда $978,(88)=10x$. Вычитая из второго уравнения первое, получим 881 = 9x. Откуда $x=\dfrac{881}{9}.$

Ответ: $\dfrac{881}{9}.$

Задача 5. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, которые не делятся нацело ни на 3, ни на 7.

Решение. Множество M всех четных трехзначных чисел можно разбить на два подмножества: M_1 — множество всех четных трехзначных чисел, которые делятся нацело или на 3 или на 7, и множество M_2 — всех четных трехзначных чисел, которые не делятся нацело на 3 и на 7. Тогда $M=M_1\cup M_2$. Также верно, что $S(M)=S(M_1)+S(M_2),$ где $S(M)$ — сумма всех четных трехзначных чисел, $S(M_1)$ — сумма всех четных трехзначных чисел, делящихся нацело или на 3, или на 7, $S(M_2)$ — сумма всех четных трехзначных чисел, не делящихся нацело на 3 и на 7.

Обозначим M_3 — множество всех четных трехзначных чисел, делящихся нацело на 3, M_4 — множество всех четных трехзначных чисел, делящихся нацело на 7.

Тогда можно записать (см. теорему 1.11 главы 1), что

$$S(M_1) = S(M_3 \bigcup M_4) = S(M_3) + S(M_4) - S(M_3 \bigcap M_4),$$

где $S(M_3 \bigcup M_4)$ — сумма всех четных трехзначных чисел, делящихся нацело или на 3, или на 7, $S(M_3)$ — сумма всех четных трехзначных чисел, делящихся нацело на 3, $S(M_4)$ — сумма всех четных трехзначных чисел, делящихся нацело на 7, $S(M_3 \bigcap M_4)$ — сумма всех четных трехзначных чисел, делящихся нацело и на 3, и на 7.

Тогда имеем $S(M) = S(M_3) + S(M_4) - S(M_3 \bigcap M_4) + S(M_2)$.

Искомая сумма $S(M_2)$ равна

$$S(M_2) = S(M) - S(M_3) - S(M_4) + S(M_3 \bigcap M_4).$$

Определим каждое слагаемое полученного выражения.

Сумма $S(M)$ — сумма членов арифметической прогрессии с разностью, равной 2, с первым членом 100 и с последним членом 998. $S(M) = 100 + 102 + 104 + \ldots + 998$.

Число членов такой прогрессии определим из соотношения (9.1.1):

$$998 = 100 + (n-1)2 \Leftrightarrow n = 450.$$

Тогда получим $S(M) = \dfrac{100+998}{2}450 = 247050.$

Сумма $S(M_3)$ — сумма членов арифметической прогрессии с разностью

6: $S(M_3) = 102 + 108 + \ldots + 996$.

Число членов такой прогрессии определим из формулы (9.1.1):

$$996 = 102 + (n-1)6 \Leftrightarrow n = 150.$$

Тогда получим $S(M_3) = \dfrac{102+996}{2}150 = 82350.$

Сумма $S(M_4)$ — сумма членов арифметической прогрессии с разностью 14:

$$S(M_4) = 112 + 126 + \ldots + 994.$$

Число членов такой прогрессии определим из формулы (9.1.1):

$$994 = 112 + (n-1)14 \Leftrightarrow n = 64.$$

Тогда получим $S(M_4) = \dfrac{112+994}{2}64 = 35392.$

Сумма $S(M_3 \bigcap M_4)$ — сумма членов арифметической прогрессии с разностью 42:

$$S(M_3 \bigcap M_4) = 126 + 168 + \ldots + 966.$$

Число членов такой прогрессии определим из формулы (9.1.1):

$$966 = 126 + (n-1)42 \Leftrightarrow n = 21.$$

Тогда получим $S(M_3 \cap M_4) = \dfrac{126+966}{2}21 = 11466.$

Окончательно имеем $S(M_2) = S(M) - S(M_3) - S(M_4) + S(M_3 \cap M_4) =$
$= 247050 - 82350 - 35392 + 11466 = 140774.$

Ответ: 140774.

Задача 6. Найдите произведение n первых членов геометрической прогрессии, если известна их сумма S и сумма σ их обратных величин.

Решение. По условию задачи имеем

$$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) \Rightarrow \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) = \frac{S}{b_1},$$

а также

$$\sigma = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\right) = \frac{1}{b_1}\left(\frac{q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1}{q^{n-1}}\right) = \frac{S}{b_1^2 q^{n-1}}.$$

Отсюда получим, что

$$b_1^2 q^{n-1} = \frac{S}{\sigma}. \qquad (*)$$

Требуется определить произведение

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = b_1^n\left(q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^{n-1}\right) = b_1^n\left(q^{1+2+3+\ldots(n-1)}\right) = b_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(b_1^2 q^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

С учетом (*) получим $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = \left(\dfrac{S}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\left(\dfrac{S}{\sigma}\right)^n}$.

Ответ: $\sqrt{\left(\dfrac{S}{\sigma}\right)^n}$.

ГЛАВА 10
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМЫ

10.1. Основные теоретические сведения

10.1.1. Показательная и логарифмическая функции и их графики

Показательная функция имеет вид $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, a — основание степени, x — показатель степени.

Областью определения показательной функции служит вся ось OX $(-\infty < x < \infty)$. ***Область значений*** функции: $y > 0$. Функция всюду возрастает, если $a > 1$, функция всюду убывает, если $0 < a < 1$ (рис. 10.1).

Если a = 1, то $y = a^x = 1^x = 1$, то функция является постоянной, и ее график превращается в прямую, параллельную оси OX.

Если $a = 0$, то функция $y = a^x = 0^x \equiv 0$ — постоянная, определенная на множестве $x > 0$.

Если a < 0, то функция определена лишь при $x \in Z$ (в этом случае ее графиком является дискретное множество точек).

Рассмотрим функцию, обратную к показательной $x = \varphi(y)$.

Действие нахождения переменной x (показателя степени) по переменной y называется логарифмированием y и обозначается $x = \varphi(y) = \log_a y$. Если в этом равенстве поменять местами x и y, то получим логарифмическую функцию $y = \log_a x$. График этой функции (рис. 10.1–10.2) симметричен биссектрисе первого-третьего координатного угла, так как функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ — взаимно обратные, при этом $a > 0, a \neq 1$.

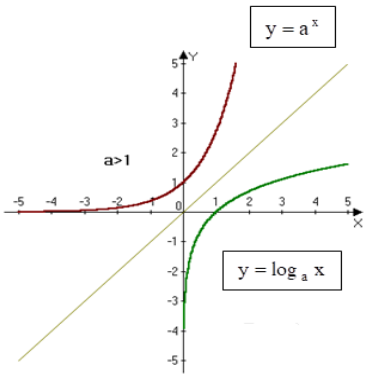


Рис. 10.1

Графики взаимно-обратных функций при $a > 1$

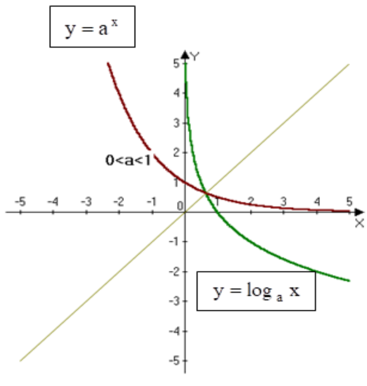


Рис. 10.2

Графики взаимно-обратных функций при $0 < a < 1$

Область определения логарифмической функции: $x > 0 \left(a > 0; a \neq 1\right)$, а ***область ее значений***: $-\infty < y < \infty$.

Характерные точки логарифмической функции:

$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$

Итак, логарифм — это показатель степени, определение которого выглядит следующим образом:

Определение 10.1

Логарифмом данного числа $N > 0$ *по данному основанию* $a > 0, a \neq 1$ *называется показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число N.*

Записывается это следующим образом:

$$x = \log_a N \Leftrightarrow N = a^x. \qquad (10.1)$$

Например, так как $2^5 = 32$, то $5 = \log_2 32$ или так как $2^0 = 1$, то $0 = \log_2 1$ или так как $2^1 = 2$, то $\log_2 2 = 1$.

Из (10.1) следует, что

$$\boxed{N = a^{\log_a N} \ (a > 0, a \neq 1, N > 0) \qquad (10.2)}$$

Данное выражение называется ***основным логарифмическим тождеством.***

Если $a = 10$, то логарифм называется **десятичным** и обозначается $\lg N = \log_{10} N$.

Если $a = e \approx 2{,}71828$, то логарифм называется **натуральным** и обозначается $\ln N = \log_e N$.

10.1.2. Основные свойства степеней и логарифмов

Основные свойства степеней и логарифмов представлены в соответственно в таблицах 10.1 и 10.2.

Таблица 10.1

Свойства степеней

1. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$	$a > 0, b > 0, \alpha \in R$
2. $\dfrac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha$	$a > 0, b > 0, \alpha \in R$
3. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$	$a > 0, \alpha, \beta \in R$
4. $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}$	$a > 0, \alpha, \beta \in R$
5. $1^\alpha = 1$	$\alpha \in R$

Таблица 10.2

Свойства логарифмов

1. $\log_a (M \cdot N) = \log_a \lvert M \rvert + \log_a \lvert N \rvert$,	$M \cdot N > 0$, $a > 0, a \neq 1$
2. $\log_a M + \log_a N = \log_a (M \cdot N)$,	$M > 0; N > 0, a > 0, a \neq 1$

3. $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a\lvert M\rvert-\log_a\lvert N\rvert$,	$M\cdot N>0$, $a>0, a\neq 1$
4. $\log_a M-\log_a N=\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)$	$M>0; N>0, a>0, a\neq 1$
5. $\log_a\left(M^{\alpha}\right)=\alpha\log_a\lvert M\rvert$	$\alpha\in R$, $M^{\alpha}>0$, $a>0, a\neq 1$
6. $\alpha\log_a M=\log_a M^{\alpha}$	$\alpha\in R$, $M>0$, $a>0, a\neq 1$
7. $\log_{a^{\beta}}\left(N^{\alpha}\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}\log_a\lvert N\rvert$	$\alpha,\beta\in R, \beta\neq 0$, $N^{\alpha}>0$, $a>0, a\neq 1$
8. $\dfrac{\alpha}{\beta}\log_a N=\log_{a^{\beta}} N^{\alpha}$	$\alpha,\beta\in R, \beta\neq 0$, $N>0$, $a>0, a\neq 1$
9. $\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$	$a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1, N>0$
10. $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$	$a>0, b>0, c>0; c\neq 1$
11. $a^{\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}}$	$a>0, b>0, (a-1)(b-1)>0$
12. $\log_a b<0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)<0$	$a>0, a\neq 1, b>0$
13. $\log_a b>0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)>0$	$a>0, a\neq 1, b>0$

Формулы 1, 3, 5, 7 таблицы 10.2 называются формулами логарифмирования[*)] произведения, частного и степени соответственно. Формулы 2, 4, 6, 8 называются формулами потенцирования[**)]. Формула 9 называется формулой перехода к новому основанию.

Докажем полезную формулу 10.

Преобразуем левую часть формулы; в показателе степени перейдем к новому основанию a: $a^{\log_c b}=a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}}=\left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\log_a c}}$.

Используя основное логарифмическое тождество и соотношение, вытекающее из формулы 9 $\dfrac{1}{\log_a c}=\log_c a$, получим $\left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\log_a c}}=b^{\log_c a}$. Тождество доказано.

Докажем полезную формулу 11.

Выражение 11 имеет смысл, если

$$\log_a b>0 \text{ и } \log_b a>0,\ a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1.$$

[*)] Логарифмированием называется действие, с помощью которого по данному числу и основанию находится логарифм данного числа.

[**)] Потенцированием называется действие с помощью которого по данному логарифму числа находится само это число.

Проследим цепочку простых тождественных преобразований левой части выражения к правой его части $a^{\sqrt{\log_a b}} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{\sqrt{\log_a b}}{\log_a b}} = b^{\frac{1}{\sqrt{\log_a b}}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$. Тождество доказано.

В п. 11.2 главы 11 доказаны формулы 12 и 13 таблицы 10.2.

Следует обратить внимание на наличие модулей в формулах логарифмирования 1, 3, 5, 7. Необходимость их появления связана с тем, что левые и правые части этих формул должны быть определены на одинаковых множествах значений переменных M и N.

10.2. Решение примеров

Пример 1. Вычислить $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

Решение. Воспользуемся последовательно формулами логарифмирования, потенцирования и основным тождеством:

$$\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2} = \left(3^{4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_3 2\right)} + 5^{2\log_5 2}\right) \cdot 7^{2\log_7 2} =$$

$$= \left(3^{1-2\log_3 2} + 5^{\log_5 4}\right) 7^{\log_7 4} = \left(\frac{3}{3^{\log_3 4}} + 4\right) \cdot 4 = \left(\frac{3}{4} + 4\right) \cdot 4 = 19.$$

Ответ: 19.

Пример 2. Упростить выражение $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$, если известно, что $m^2 = a^2 - b^2$.

Решение. Выражение определено при

$$m > 0, (a+b) > 0, (a+b) \neq 1, (a-b) > 0, (a-b) \neq 1.$$

Преобразуем выражение, переходя к основанию $m \neq 1$:

$$\frac{1}{\log_m (a+b)} + \frac{1}{\log_m (a-b)} - \frac{2}{\log_m (a+b)\log_m (a-b)} = \frac{\log_m (a-b) + \log_m (a+b) - 2}{\log_m (a+b)\log_m (a-b)} =$$

$$= \frac{\log_m \left(a^2 - b^2\right) - 2}{\log_m (a+b)\log_m (a-b)} = \frac{\log_m m^2 - 2}{\log_m (a+b)\log_m (a-b)} = \frac{2\log_m |m| - 2}{\log_m (a+b)\log_m (a-b)} =$$

$$= \frac{2\log_m m - 2}{\log_m (a+b)\log_m (a-b)} = 0.$$

Если $m = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, то переходить к основанию m нельзя. Тогда, подставляя $m = 1$, в исходное выражение, получим, что оно также равно 0.

Ответ: 0 при $m > 0, (a+b) > 0, (a+b) \neq 1, (a-b) > 0, (a-b) \neq 1$.

Пример 3. Упростить выражение $\left(a^{\frac{\log_{1000} a}{\lg a}} \cdot b^{\frac{\log_{1000} b}{\lg b}}\right)^{3\log_{ab}(2a+3b)}$.

Решение. Выражение определено при $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, ab \neq 1$.

Имеем:

$$\left(a^{\frac{\log_{1000} a}{\lg a}}\cdot b^{\frac{\log_{1000} b}{\lg b}}\right)^{3\log_{ab}(2a+3b)}=\left(a^{\frac{\lg a}{3\lg a}}\cdot b^{\frac{\lg b}{3\lg b}}\right)^{3\log_{ab}(2a+3b)}=(ab)^{\frac{1}{3}(3\log_{ab}(2a+3b))}=2a+3b.$$

Ответ: $2a+3b$ при $a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1, ab\neq 1$.

Пример 4. Упростить выражение

$$A=\left[\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}+2\right]^{\frac{1}{2}}-\log_b a-\log_a b.$$

Решение. Выражение определено при $a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1$.

Выражение в круглых скобках равно

$$\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\log_b^4 a+2\log_b^2 a\cdot\log_a^2 b+\log_a^4 b\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\left(\log_b^2 a+\log_a^2 b\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left|\log_b^2 a+\log_a^2 b\right|=\log_b^2 a+\log_a^2 b.$$

Аналогично, выражение в квадратных скобках равно

$$\left[\log_b^2 a+\log_a^2 b+2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\log_b^2 a+\log_a^2 b+2\log_b a\cdot\log_a b\right]^{\frac{1}{2}}=\left|\log_b a+\log_a b\right|.$$

Тогда $A=\left|\log_b a+\log_a b\right|-\left(\log_b a+\log_a b\right)$.

Преобразуем выражение под знаком модуля.

$$\left|\log_b a+\log_a b\right|=\left|\frac{1}{\log_a b}+\log_a b\right|=\left|\frac{1+\log_a^2 b}{\log_a b}\right|=\frac{1+\log_a^2 b}{\left|\log_a b\right|}.$$

Тогда $A=\dfrac{1+\log_a^2 b}{\left|\log_a b\right|}-\dfrac{1+\log_a^2 b}{\log_a b}$.

Используя формулы 12 и 13 таблицы 10.2, получим

$$\frac{1+\log_a^2 b}{\left|\log_a b\right|}=\begin{cases}\dfrac{1+\log_a^2 b}{\log_a b}, & \text{при } (a-1)(b-1)>0\\[2ex] -\dfrac{1+\log_a^2 b}{\log_a b}, & \text{при } (a-1)(b-1)<0.\end{cases}$$

Тогда $A=0$, если $(a-1)(b-1)>0$; $A=-2\left(\log_b a+\log_a b\right)$, если $(a-1)(b-1)<0$.

Ответ: $A=0$, если $(a-1)(b-1)>0$; $A=-2\left(\log_b a+\log_a b\right)$, если $(a-1)(b-1)<0$ при $a>0, b>0$.

Пример 5. Найти $\log_{108}\dfrac{3}{2}$, если $\log_{108} 81=a$.

Решение. Разложим числа 108 и 81 на простые множители: $108=2^2\cdot 3^3$. $81=3^4$. В данные разложения входят множители 2 и 3.

Перейдем в данных логарифмах к одному из оснований 2 или 3.

Например, перейдем к основанию 3.

$$\log_{108}\frac{3}{2}=\frac{\log_3\frac{3}{2}}{\log_3 108}=\frac{1-\log_3 2}{\log_3(3^3\cdot 2^2)}=\frac{1-\log_3 2}{3+2\log_3 2}.$$

$$\log_{108}81=\frac{\log_3 3^4}{\log_3 108}=\frac{4}{3+2\log_3 2}=a.$$

Дальнейший план решения такой. Выразим из второго равенства $\log_3 2$ через a и подставим его в первое равенство.

$$\frac{4}{3+2\log_3 2}=a\Rightarrow 4=3a+2a\log_3 2\Rightarrow \log_3 2=\frac{4-3a}{2a}.$$

$$\log_{108}\frac{3}{2}=\frac{1-\log_3 2}{3+2\log_3 2}=\frac{1-\frac{4-3a}{2a}}{3+\frac{4-3a}{a}}=\frac{5a-4}{8}.$$

Ответ: $\frac{5a-4}{8}$.

Пример 6. Дано $\lg 196=a; \lg 56=b$. Найти $\lg 0{,}175$.

Решение. Представим $\lg 0{,}175=\lg\frac{175}{1000}=\lg\frac{7}{40}=\lg 7-\lg 40.$ Разложим числа 196, 56 и 40 на простые множители:

$$196=2^2\cdot 7^2.\ 56=2^3\cdot 7,\ 40=2^3\cdot 5.$$

В данные разложения входят множители 2, 5, 7.

Перейдем в логарифмах к новому основанию, например 2.

$$\lg 196=\frac{\log_2(2^2\cdot 7^2)}{\log_2(2\cdot 5)}=\frac{2+2\log_2 7}{1+\log_2 5}=a.$$

$$\lg 56=\frac{\log_2(2^3\cdot 7)}{\log_2(2\cdot 5)}=\frac{3+\log_2 7}{1+\log_2 5}=b.$$

$$\lg 0{,}175=\frac{\log_2 7}{1+\log_2 5}-\frac{\log_2(2^3\cdot 5)}{1+\log_2 5}=\frac{\log_2 7-3-\log_2 5}{1+\log_2 5}.$$

Дальнейший план действий такой. Решаем систему из двух первых уравнений и определяем из нее $\log_2 7$ и $\log_2 5$, выраженные через a и b, после этого подставляем найденные значения в третье уравнение.

$$\begin{cases}\dfrac{2+2\log_2 7}{1+\log_2 5}=a\\[2ex] \dfrac{3+\log_2 7}{1+\log_2 5}=b.\end{cases}$$

Разделим первое уравнение на второе, получим

$$\begin{cases}\dfrac{2+2\log_2 7}{3+\log_2 7}=\dfrac{a}{b}\\ \dfrac{3+\log_2 7}{1+\log_2 5}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2b+2b\log_2 7=3a+a\log_2 7\\ \dfrac{3+\log_2 7}{1+\log_2 5}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2 7=\dfrac{3a-2b}{2b-a}\\ 3+\dfrac{3a-2b}{2b-a}=b+b\log_2 5.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_2 7=\dfrac{3a-2b}{2b-a}\\ 3+\dfrac{3a-2b}{2b-a}=b+b\log_2 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2 7=\dfrac{3a-2b}{2b-a}\\ \log_2 5=\dfrac{6b-3a+3a-2b-2b^2+ab}{b(2b-a)}=\dfrac{4-2b+a}{2b-a}.\end{cases}$$

$$\lg 0{,}175=\frac{\log_2 7-\log_2 5-3}{1+\log_2 5}=\frac{\dfrac{3a-2b}{2b-a}-\dfrac{4-2b+a}{2b-a}-3}{1+\dfrac{4-2b+a}{2b-a}}=\frac{3a-2b-4+2b-a-6b+3a}{2b-a+4-2b+a}=$$

$$=\frac{5a-6b-4}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{5a-6b-4}{4}$.

Пример 7. Доказать тождество $\lg^2\sqrt{ab}=\dfrac{1}{4}\left(\lg^2|a|+2\lg|a|\cdot\lg|b|+\lg^2|b|\right)$.

Решение. Выражение определено при $ab>0$.

Заметим, что $\lg^2\sqrt{ab}\neq\lg^2\sqrt{|a|}+\lg^2\sqrt{|b|}$.

$$\lg^2\sqrt{ab}=\left(\lg\sqrt{ab}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\lg|ab|\right)^2=\left(\frac{1}{2}(\lg|a|+\lg|b|)\right)^2=\frac{1}{4}\left(\lg^2|a|+2\lg|a|\cdot\lg|b|+\lg^2|b|\right).$$

Тождество доказано.

Пример 8. Доказать, что $\log_3 7>\log_7 27$.

Решение.

Так как $\log_7 27=\dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 7}=\dfrac{3}{\log_3 7}$, то необходимо доказать, что $\log_3 7>\dfrac{3}{\log_3 7}$ или что $\log_3 7>\sqrt{3}\Rightarrow\log_3 7>\log_3 3^{\sqrt{3}}\Rightarrow 7>3^{\sqrt{3}}$.

Очевидно, что $\sqrt{3}<1{,}75=\dfrac{7}{4}$. Если мы покажем, что $7>3^{\frac{7}{4}}$ или $7^4>3^7$, то это значит, что $7>3^{\sqrt{3}}$.

Так как $7^4=2401>3^7=2187$, то $\log_3 7>\log_7 27$.

Пример 9. Сравнить числа $\log_{20}80$ и $\log_{80}640$.

Решение.

Перейдем в первом логарифме к основанию 2:

$$\log_{20}80=\frac{\log_2 80}{\log_2 20}=\frac{\log_2(2^4\cdot 5)}{\log_2(2^2\cdot 5)}=\frac{4+\log_2 5}{2+\log_2 5}=1+\frac{2}{2+\log_2 5}.$$

Во втором логарифме также перейдем к основанию 2:

$$\log_{80}640=\frac{\log_2 640}{\log_2 80}=\frac{\log_2(2^7\cdot 5)}{\log_2(2^4\cdot 5)}=\frac{7+\log_2 5}{4+\log_2 5}.=1+\frac{3}{4+\log_2 5}.$$

Сравним полученные числа $1+\frac{2}{2+\log_2 5}$ и $1+\frac{3}{4+\log_2 5}$.

Число $1+\frac{3}{4+\log_2 5}$ больше числа $1+\frac{2}{2+\log_2 5}$, так как

$$1+\frac{3}{4+\log_2 5}>1+\frac{2}{2+\log_2 5}\Rightarrow\frac{3}{4+\log_2 5}>\frac{2}{2+\log_2 5}\Rightarrow\frac{\log_2 5-2}{(4+\log_2 5)(2+\log_2 5)}>0.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $\log_2 5>2$.

Ответ: Число $\log_{80}640$ больше числа $\log_{20}80$.

ГЛАВА 11
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

11.1. Показательные и логарифмические уравнения

Показательным уравнением называется такое уравнение, в котором неизвестная величина содержится только в показателе степени.

Логарифмическим уравнением называется такое уравнение, в котором неизвестная величина содержится только под знаком логарифма или в его основании.

Уравнения, в котором неизвестная величина содержится и в показателе степени и под знаком логарифма (или в его основании), называется показательно-логарифмическим уравнением.

Уравнения, в котором неизвестная величина содержится и в показателе степени и в основании степени, называется показательно-степенным.

Например, $2^x + 3^{x+2} = 1$ — показательное уравнение,

$\log_x(x+1) + \log_2(x^2+3) = 0$ — логарифмическое уравнение,

$2^x \cdot \log_{33}(x+5)$ — показательно-логарифмическое уравнение,

$(2x+3)^{\log_x(9x^2)} = x^{\log_{x^2}(3x)}$ — показательно-степенное уравнение.

11.1.1. Методы решения показательных уравнений

Теорема 11.1

Уравнение $a^x = b$, *где* $a > 0, a \neq 1$, *однозначно разрешимо при любом* $b > 0$. *При этом его корнем является число* $x = \log_a b$. *Если* $b \le 0$, *то уравнение решений не имеет.*

$$a^x = \begin{cases} x = \log_a b & \text{при } b > 0 \\ x \in \varnothing & \text{при } b \le 0. \end{cases} \qquad (11.1)$$

Теорема 11.2

Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, *где* $a > 0, a \neq 1$ *равносильно уравнению* $f(x) = g(x)$.

Теорема 11.3

Уравнение с разными основаниями $a \neq b$ $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, *где* $a > 0, a \neq 1; b > 0, b \neq 1$ *равносильно уравнениям* $f(x) = g(x)\log_a b$ *или* $g(x) = f(x)\log_b a$.

Пример 1. Решить уравнение $0{,}125 \cdot 4^{-x} = (0{,}5)^{3x-1}$.

Решение. Так как $0{,}125 = 2^{-3}; 4^{-x} = 2^{-2x}; 0{,}5 = 2^{-1}$, то в данном уравнении можно привести степени к одинаковым основаниям:

$$2^{-3} \cdot 2^{-2x} = 2^{-3x+1} \Leftrightarrow 2^{-3-2x} = 2^{-3x+1}.$$

Применяя теорему 11.2, получим

$$-3 - 2x = -3x + 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: $x = 4$.

Пример 2. Решить уравнение $5^{2x-1} = 7^{3-x}$.

Решение. Можно применить теорему 11.3. К такому же результату приводит логарифмирование обеих частей данного уравнения по основанию 5.

$$\log_5\left(5^{2x-1}\right) = \log_5\left(7^{3-x}\right) \Leftrightarrow 2x - 1 = (3 - x)\log_5 7.$$

Выражая из последнего уравнения x, получим $x = \dfrac{3\log_5 7 + 1}{2 + \log_5 7}$.

Ответ: $x = \dfrac{3\log_5 7 + 1}{2 + \log_5 7}$.

Пример 3. Решить уравнение $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x \neq -1$. Перепишем уравнение в виде $5^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 5^2 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-2} = 2^{2-\frac{3x}{x+1}} \Leftrightarrow 5^{x-2} = 2^{\frac{2-x}{x+1}}$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 5, получим равносильное уравнение $x - 2 = \dfrac{2-x}{x+1}\log_5 2$.

Решаем полученное уравнение относительно переменной x.

$$(x-2)\left(1 + \frac{\log_5 2}{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ 1 + \dfrac{\log_5 2}{x+1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -\log_5 2 - 1 = -\dfrac{\lg 2}{\lg 5} - 1 = -\dfrac{1}{\lg 5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{2; -\dfrac{1}{\lg 5}\right\}$.

Различные типы показательных уравнений в конечном счете приводятся к уравнению вида (11.1).

Рассмотрим основные типы показательных уравнений.

1. Уравнения вида $f(a^x) = 0$.

После замены $a^x = t, t > 0$, уравнение сводится к уравнению $f(t) = 0$.

Пусть $t = t_1, t = t_2, \ldots t = t_n$ — корни этого уравнения.

Тогда уравнение $f(a^x) = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a^x = t_1 \\ a^x = t_2 \\ \ldots. \\ a^x = t_n, \end{array}\right.$$

каждое из которых является простейшим показательным уравнением вида (11.1).

Пример 4. Решить уравнение $9^x - 11\cdot 3^x + 30 = 0.$

Решение. Сделав замену $3^x = t, t > 0$, получим уравнение

$$t^2 - 11t + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 5 \\ t_2 = 6. \end{array}\right.$$

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 5 \\ 3^x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \log_3 5 \\ x_2 = \log_3 6. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = \log_3 5; x_2 = \log_3 6.$

2. Уравнения, однородные относительно $a^{f(x)}$ **и** $b^{f(x)}$ $(a > 0, a \neq 1; b > 0, b \neq 1; a \neq b)$.

Так называются уравнения вида

$$P\left(a^{f(x)}, b^{f(x)}\right) = 0,$$

где $P(u,v) = c_n u^n + c_{n-1}u^{n-1}v + ... + c_1 uv^{n-1} + c_0 v^n (c_n \neq 0)$ — однородный многочлен степени $n > 1$. При этом u = $a^{f(x)}$ и v = $b^{f(x)}$.

Сумма показателей степеней при u и v в каждом слагаемом такого многочлена одинакова и равна n.

Однородные уравнения решаются делением обеих его частей на старшую степень выражения $b^{f(x)}$ с последующей заменой:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t, t > 0.$$

Дальнейшее решение уравнения совпадает с решением уравнений вида 1.

Пример 5. Решить уравнение $3\cdot 16^x + 37\cdot 36^x - 26\cdot 81^x = 0.$

Решение. Так как $16 = 2^4, 36 = 2^2\cdot 3^2, 81 = 3^4$, то данное уравнение равносильно уравнению $3\cdot 2^{4x} + 37\cdot 2^{2x}\cdot 3^{2x} - 26\cdot 3^{4x} = 0$.

Данное уравнение является однородным, так как сумма показателей степеней при основаниях 2 и 3 равна одному и тому же числу 4.

Разделим обе части уравнения на 3^{4x}, получим равносильное уравнение $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + 37\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 26 = 0.$

После замены $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = t, t > 0$, приходим к квадратному уравнению $3t^2 + 37t - 26 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{2}{3} \\ t_2 = -13. \end{array}\right.$

Корень $t_2 = -13 < 0$ — посторонний. Тогда получим простейшее уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

3. Уравнения, при решении которых используются свойства показательных функций

Подобные уравнения были рассмотрены в главе 7 (см. п. 7.1.3). В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пример 6. Решить уравнение $3^x + 5^x = 34$.

Решение. Ни один из указанных способов решения применить здесь не представляется возможным. Для решения данного уравнения воспользуемся свойством монотонности показательной функции.

В начале заметим, что число x = 2 является корнем данного уравнения. Покажем, что других корней это уравнение не имеет.

В самом деле, так как функция $y = 3^x + 5^x$ является строго возрастающей на всей числовой оси R (как сумма двух строго возрастающих показательных функций), то при $x < 2$ будем иметь $y < y(2) \Leftrightarrow 3^x + 5^x < 3^2 + 5^2 = 34$.

Следовательно, при $x < 2$ уравнение корней не имеет. Аналогично доказывается, что и при $x > 2$ уравнение также не имеет корней.

Ответ: $x = 2$.

Пример 7. Решить уравнение $4^{\sqrt{x+2}} - 2^x = 4\left(4^{-2\sqrt{x+2}} - 4^{-x}\right)$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Обе части уравнения должны иметь одинаковые знаки.

Тогда имеем систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{\sqrt{x+2}} - 2^x \geq 0 \\ 4^{-2\sqrt{x+2}} - 4^{-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2\sqrt{x+2}} \geq 2^x \\ 4^{-2\sqrt{x+2}} \geq 4^{-x}. \end{cases}$$

Так как показательная функция при основании, большем единицы, является возрастающей функцией, то имеем равносильную систему неравенств:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+2} \geq x \\ -2\sqrt{x+2} \geq -x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+2} \geq x \\ 2\sqrt{x+2} \leq x \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 8 = 0 \\ x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{3}.$$

Полученный корень принадлежит ОДЗ.

Ответ: $x = 2 + 2\sqrt{3}$.

11.1.2. Показательно-степенные уравнения

Рассмотрим уравнение вида $(\varphi_1(x))^{g_1(x)} = (\varphi_2(x))^{g_2(x)}$.

Предполагается, что $\varphi_1(x); \varphi_2(x) > 0$.

Показательно-степенные уравнения обычно решают логарифмированием по произвольному основанию a $(a > 0, a \neq 1)$.

Часто встречаются показательно-степенные уравнения с одинаковыми основаниями:

$$(\varphi(x))^{g_1(x)} = (\varphi(x))^{g_2(x)}. \qquad (11.2)$$

Логарифмируя по основанию a $(a>0, a\neq 1)$, получим

$$\log_a(\varphi(x))^{g_1(x)} = \log_a(\varphi(x))^{g_2(x)} \Rightarrow g_1(x)\log_a\varphi(x) = g_2(x)\log_a\varphi(x).$$

Упрощая далее, получим $\log_a\varphi(x)(g_1(x)-g_2(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi(x)=1\\ g_1(x)=g_2(x).\end{array}\right.$

Замечание. Равенство (11.2) может выполняться и в тех случаях, когда основание $\varphi(x)$ обращается в ноль или в (-1). Указанные значения не входят в область определения показательно-степенной функции. Но задача заключается в решении уравнения, а решениями уравнения являются все те значения x, которые, будучи подставленные в уравнение, превращают его в верное равенство. И, если мы ограничим решения только областью определения показательно-степенной функции, то имеем большой шанс часть решений потерять. Таким образом, для нахождения всей совокупности решений следует дополнительно решить уравнения $\varphi(x)=-1$ и $\varphi(x)=0$ и подстановкой корней в исходное уравнение проверить, обращают ли они его в верное равенство.

Пример 8. Решить уравнение $|x-3|^{\frac{x+1}{4}} = |x-3|^{\frac{x-2}{3}}$.

Решение.

В соответствии с изложенным выше, получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l}|x-3|=1\\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{x-2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2\\ x_2=4\\ x_3=11.\end{array}\right.$$

Далее решим уравнение $|x-3|=0 \Leftrightarrow x=3$.

Подставим $x=3$ в уравнение. При этом следует иметь в виду, что

$$0^{g(x)} = \begin{cases}0 \ \text{ при } \ g(x)>0\\ \varnothing \ \text{ при } \ g(x)\le 0\end{cases}.$$

Получим $0^1 = 0^{\frac{1}{3}} = 0$. Следовательно $x_4 = 3$ — корень уравнения.

Ответ: $\{2;\ 3;\ 4;\ 11\}$.

11.1.3. Методы решения логарифмических уравнений

Теорема 11.4

При любом $b\in R$ *уравнение* $\log_a x = b$, *где* $a>0; a\neq 1$, *имеет единственное решение:*

$$x = a^b. \qquad (11.3)$$

1. Уравнения вида $f(\log_a x) = 0 \quad (a>0; a\neq 1)$.

После замены $\log_a x = t$ уравнение сводится к уравнению $f(t)=0$. Пусть $t=t_1; t=t_2; \ldots t=t_n$ — корни этого уравнения.

Тогда уравнение $f(\log_a x) = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\log_a x = t_1 \\ \log_a x = t_2 \\ \ldots. \\ \log_a x = t_n,\end{array}\right.$$

каждое из которых является простейшим логарифмическим уравнением вида (11.3).

Пример 9. Решить уравнение $\lg x + \dfrac{12}{\lg x} - 7 = 0$.

Решение.

ОДЗ уравнения: $x > 0; x \neq 1$. Сделав замену $\lg x = t$, получим уравнение $t + \dfrac{12}{t} - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 12. = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = 4. \end{array}\right.$

Следовательно, данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} \lg x = 3 \\ \lg x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1000 \\ x_2 = 10000 \end{array}\right. \in$ ОДЗ.

Ответ: $x_1 = 1000; x_2 = 10000$.

2. Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0; a \neq 1)$.

Теорема 11.5

Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *равносильно системам*

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 10. Решить уравнение $\log_{0,2} \dfrac{2+x}{10} = \log_{0,2} \dfrac{2}{x+1}$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{2+x}{10} = \dfrac{2}{x+1} \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -6 \end{array}\right. \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

3. Уравнения вида $\log_{g(x)} f(x) = b$.

Теорема 11.6

Уравнение $\log_{g(x)} f(x) = b$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^b \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Пример 11. Решить уравнение $\log_{x+1}(x^2-3x+1)=1$.

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x+1=x+1 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x=0 \\ x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right. \\ x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: $x=4$.

4. Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x)=\log_{f(x)} h(x)$.

Теорема 11.7

Уравнение $\log_{f(x)} g(x)=\log_{f(x)} h(x)$ *равносильно системам*

$$\begin{cases} g(x)=h(x) \\ f(x)>0 \\ f(x)\neq 1 \\ g(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=h(x) \\ f(x)>0 \\ f(x)\neq 1 \\ h(x)>0. \end{cases}$$

Пример 12. Решить уравнение $\log_{x^2-1}\left(x^3+6\right)=\log_{x^2-1}\left(4x^2-x\right)$.

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^3+6=4x^2-x \\ x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ x^3+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+x+6=0 \\ x^2-1>0 \\ x^2\neq 2 \\ x^3>-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{array}\right. \\ x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty) \\ x>-\sqrt[3]{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{2;3\}$.

5. Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x)=\log_{p(x)} g(x)$.

Теорема 11.8

Уравнение $\log_{f(x)} g(x)=\log_{p(x)} g(x)$ *равносильно совокупности двух систем* 1) $\begin{cases} g(x)=1 \\ f(x)>0 \\ f(x)\neq 1 \\ p(x)>0 \\ p(x)\neq 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} f(x)=p(x) \\ g(x)>0 \\ g(x)\neq 1 \\ f(x)>0 \\ f(x)\neq 1. \end{cases}$

Практически, нет необходимости запоминать эти системы. Логический подход к решению уравнения сам приведет к решению данных систем. Уравнение имеет разные основания входящих в него логарифмов. Целесообразно перейти к одному основанию.

Таким основанием удобно выбрать $g(x)$. Если выбрать $g(x)$ в качестве нового основания, то в уравнении с таким основанием $g(x) > 0;\ g(x) \neq 1$. Но в исходном уравнении функция $g(x)$ может равняться единице и при этом обращать уравнение в тождество, т. е. решение уравнения $g(x) = 1$ может являться корнем исходного уравнения. Следовательно, перед переходом к новому основанию необходимо проверить являются ли корни уравнения $g(x) = 1$ корнями исходного уравнения, следующим шагом будет переход к новому основанию и решение примера известным методом.

Пример 13. Решить уравнение $\log_{x^3+x}\left(x^2-4\right) = \log_{4x^2-6}\left(x^2-4\right)$.

Решение.

ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x^3 + x > 0 \\ x^3 + x \neq 1 \\ 4x^2 - 6 > 0 \\ 4x^2 - 6 \neq 1 \\ x^2 - 4 > 0. \end{cases}$

Перейдем в уравнении к основанию $x^2 - 4$. Так как новое основание $x^2 - 4$ не может быть равным единице, то сначала проверим не являются ли корни уравнения $x^2 - 4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ решением исходного уравнения. Подставляя $x = \pm\sqrt{5}$ в исходное уравнение, получим, что при $x = \sqrt{5}$ левая и правая части уравнения равны. Значит $x = \sqrt{5}$ — корень исходного уравнения.

Далее, переходя к новому основанию $x^2 - 4$, запишем

$$\frac{1}{\log_{x^2-4}\left(x^3+x\right)} = \frac{1}{\log_{x^2-4}\left(4x^2-6\right)} \text{ или}$$

$$\log_{x^2-4}\left(x^3+x\right) = \log_{x^2-4}\left(4x^2-6\right) \Rightarrow x^3 + x = 4x^2 - 6 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$$

Решая данное уравнение, получим его корни $x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = 3$.

Всем неравенствам, определяющим ОДЗ уравнения, удовлетворяет только значение $x = 3$.

Ответ: $\left\{\sqrt{5}; 3\right\}$.

Отметим, что если предложенное уравнение не соответствует ни одному из указанных выше типов, то рекомендуется свести данное уравнение к виду, допускающему потенцирование, найти его корни и проверить их соответствие ОДЗ.

Пример 14. Решить уравнение $\log_3(x^2-2) + 2\log_3 x = 3\log_3 2$.

Решение.

ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x^2-2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\sqrt{2}$.

Запишем заданное уравнение в виде

$$\log_3(x^2-2)+2\log_3 x=3\log_3 2 \Leftrightarrow \log_3(x^2-2)+\log_3 x^2=\log_3 x^2\left(x^2-2\right)=\log_3 8.$$

После потенцирования получим уравнение

$$x^2(x^2-2)=8 \Leftrightarrow x^4-2x^2-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 2.$$

ОДЗ удовлетворяет только корень $x=2$.

Ответ: $x=2$.

Пример 15. Решить уравнение $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}\left(x+2\right)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right)^3+\log_{\frac{1}{4}}\left(x+6\right)^3$.

Решение. ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x\neq -2 \\ 4-x>0 \Leftrightarrow x\in\left(-6;-2\right)\cup\left(-2;4\right). \\ x+6>0 \end{cases}$

Преобразуя левую часть уравнения по формуле 5 таблицы 10.2 раздела 10.1.2, получим $3\log_{\frac{1}{4}}\left|x+2\right|-3=3\log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right)+3\log_{\frac{1}{4}}\left(x+6\right)$.

Собирая члены с логарифмами, получим $3\left[\log_{\frac{1}{4}}\frac{\left|x+2\right|}{\left(4-x\right)\left(x+6\right)}\right]=3$.

Из последнего соотношения после потенцирования следует, что

$$\frac{\left|x+2\right|}{\left(4-x\right)\left(x+6\right)}=\frac{1}{4} \Rightarrow \left|4x+8\right|=\left(4-x\right)\left(x+6\right).$$

Решая последнее уравнение с модулем, получим совокупность из двух систем (см. теорему 2.8 п. 2.4.1).

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(4-x\right)\left(x+6\right)\geq 0 \\ 4x+8=\left(4-x\right)\left(x+6\right) \end{cases} \\ \begin{cases} \left(4-x\right)\left(x+6\right)\geq 0 \\ 4x+8=\left(x-4\right)\left(x+6\right) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(4-x\right)\left(x+6\right)\geq 0 \\ x^2+6x-16=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \left(4-x\right)\left(x+6\right)\geq 0 \\ x^2-2x-32=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(4-x\right)\left(x+6\right)\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-8 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \left(4-x\right)\left(x+6\right)\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{33} \\ x=1-\sqrt{33} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1-\sqrt{33}. \end{array}\right.$$

Оба найденных корня принадлежат ОДЗ $x\in\left(-6;-2\right)\cup\left(-2;4\right)$.

Ответ: $\left\{1-\sqrt{33};\,2\right\}$.

11.1.4. Системы показательных и логарифмических уравнений

Совокупность двух (или более) показательных уравнений называется системой показательных уравнений.

Аналогично определяются системы логарифмических уравнений.

Обычно, пользуясь методом исключения неизвестных, такие системы сводят к одному уравнению, а затем применяют рассмотренные методы решений уравнений.

Пример 16. Решить систему уравнений $\begin{cases} \log_2(xy) = 5 \\ \log_{0,5}\dfrac{x}{y} = 1. \end{cases}$

Решение. ОДЗ системы: $xy > 0$.

По теореме (11.6) получим

$$\begin{cases} xy = 32 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 32 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 32 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -8. \end{cases} \end{array} \right.$$

Полученные значения удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\{(4;8);(-4;-8)\}$

Пример 17. Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{\log_3 xy} - \log_3\dfrac{1}{xy} = 3 \\ \log_3(3+xy) - 2\log_9 y = \log_3(y-1). \end{cases}$

Решение. ОДЗ системы: $y > 1, x > 0$.

Преобразуем систему к следующему виду:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\log_3 xy} + \log_3 xy = 3 \\ \log_3(3+xy) = \log_3(y-1) + \log_3 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\log_3 xy} + \log_3 xy = 3 \\ \log_3(3+xy) = \log_3 y(y-1). \end{cases}$$

Потенцируя второе уравнение, получим

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\log_3 xy} + \log_3 xy = 3 \\ (3+xy) = y(y-1). \end{cases}$$

В первом уравнении сделаем замену $\log_3 xy = t$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{2}{t} + t = 3 \\ (3+xy) = y(y-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ (3+xy) = y(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{array} \right. \\ (3+xy) = y(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy = 9 \\ xy = 3 \end{array} \right. \\ (3+xy) = y(y-1). \end{cases}$$

Система распадается на совокупность из двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=9\\(3+xy)=y(y-1)\end{cases}\\ \begin{cases}xy=3\\(3+xy)=y(y-1)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=9\\y^2-y-12=0\end{cases}\\ \begin{cases}xy=3\\y^2-y-6=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=9\\ \left[\begin{array}{l}y=4\\y=-3\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}xy=3\\ \left[\begin{array}{l}y=-2\\y=3\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=\dfrac{9}{4}\\y_1=4\end{cases}\\ \begin{cases}x_2-3\\y_2=-3\end{cases}\\ \begin{cases}x_3=-\dfrac{3}{2}\\y_3=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x_4=1\\y_4=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

ОДЗ удовлетворяют только значения $x_1=\dfrac{9}{4};y_1=4$ и $x_4=1;y_4=3.$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{9}{4};4\right);(1;3)\right\}$.

11.2. Показательные и логарифмические неравенства

Решение данных неравенств основано на применении преобразований, приводящих показательные и логарифмические неравенства к алгебраическим.

Теорема 11.9

Неравенство $f(a^x)>0,(0<a\neq 1)$ *равносильно системе*

$$\begin{cases}a^x=t>0\\f(t)>0.\end{cases}$$

Теорема 11.10 (основание степени — постоянная величина)

Неравенство $a^{\varphi_1(x)}>a^{\varphi_2(x)},0<a\neq 1$ *равносильно одной из двух систем*

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\\varphi_1(x)>\varphi_2(x)\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\\varphi_1(x)<\varphi_2(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 11.11 (основание степени — переменная величина)

Неравенство $a(x)^{\varphi_1(x)}>a(x)^{\varphi_2(x)}$ *равносильно системе*

$$\begin{cases}a(x)>0\\ [a(x)-1]\cdot[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]>0.\end{cases}$$

Замечание. Решение нестрогого неравенства $a(x)^{\varphi_1(x)}\geq a(x)^{\varphi_2(x)}$ равносильно системе $\begin{cases}a(x)>0\\ [a(x)-1]\cdot[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]\geq 0.\end{cases}$

Теорема 11.12

Неравенство $f(\log_a x) > 0,\ (0 < a \neq 1)$ *равносильно системе*

$$\begin{cases} \log_a x = t \\ 0 < a \neq 1 \\ f(t) > 0. \end{cases}$$

Теорема 11.13 (основание логарифма — постоянная величина)

Неравенство $\log_a f_1(x) > \log_a f_2(x)$, $0 < a \neq 1$ *равносильно одной из двух систем*

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f_1(x) > f_2(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f_1(x) < f_2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 11.14 (основание логарифма — переменная величина)

Неравенство $\log_{a(x)} f_1(x) > \log_{a(x)} f_2(x)$, *равносильно системе*

$$\begin{cases} 0 < a(x) \neq 1 \\ f_1(x) > 0 \\ f_2(x) > 0 \\ [a(x) - 1] \cdot [f_1(x) - f_2(x)] > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу, поставленную в разделе 10.1.2 главы 10.

Доказать, что неравенство $\log_a b > 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \\ (a-1)(b-1) > 0. \end{cases}$$

Решение. Если $\log_a b > 0$, то $\log_a b > \log_a 1$.

При $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, следовательно $\log_a b > \log_a 1 \Leftrightarrow b > 1$. Если $a > 1$ и $b > 1$, то $(a-1)(b-1) > 0$.

При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, следовательно $\log_a b > \log_a 1 \Leftrightarrow b < 1$. Если $0 < a < 1$ и $b < 1$, то также $(a-1)(b-1) > 0$.

Аналогично доказывается утверждение, что неравенство $\log_a b < 0$ равносильно системе $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \\ (a-1)(b-1) < 0. \end{cases}$

Пример 1. Решить неравенство $x^{x^2-16x} \geq x^{x-30}$.

Решение. Применим теорему 11.11:

$$\begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x^2 - 16x - x + 30) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x^2 - 17x + 30) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x-2)(x-15) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;2] \cup [15;\infty).$$

Ответ: $x \in [1;2] \cup [15;\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $5^x \le 500 \cdot 8^{\frac{1-x}{x}}$.

Решение. ОДЗ неравенства: $x \ne 0$.

Так как $500 = 2^2 \cdot 5^3$, то неравенство примет вид

$$5^x \le 5^3 \cdot 2^2 \cdot 2^{\frac{3-3x}{x}} \Leftrightarrow 5^{x-3} \le 2^{\frac{3-x}{x}}.$$

Перейдем к равносильному логарифмическому неравенству, взяв от обеих частей неравенства логарифм по основанию 5.

Получим неравенство того же смысла:

$$(x-3) \le \left(\frac{3-x}{x}\right)\log_5 2 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+\log_5 2}{x}\right) \le 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов, получим $x \in (-\infty; -\log_5 2] \cup (0;3]$.

Замечание. Неравенство $5^{x-3} \le 2^{\frac{3-x}{x}}$ можно было также «подвести» под теорему 11.11 с использованием основного логарифмического тождества.

$$5^{x-3} \le 5^{\log_5\left(2^{\frac{3-x}{x}}\right)} \Leftrightarrow (x-3) \le \log_5 2^{\frac{3-x}{x}} \Leftrightarrow (x-3) \le \left(\frac{3-x}{x}\right)\log_5 2.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -\log_5 2] \cup (0;3]$.

Пример 3. Решить неравенство $9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{x+2}{x}} > 0$.

Решение. ОДЗ неравенства: $x \ne 0$. Преобразуем неравенство к виду $3^{\frac{2}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}3^{\frac{1}{x}} - 2 \cdot 2^{\frac{2}{x}} > 0$.

Левая часть неравенства — однородная функция. Разделим обе части неравенства на $2^{\frac{2}{x}} > 0$, получим неравенство $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - 2 > 0$. Обозначив $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = t, t > 0$, придем к системе неравенств

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 + t - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ \left[\begin{array}{l} t > 1 \\ t < -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t > 0 \\ t > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ t < -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 1 \\ t \in \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow t > 1.$$

Таким образом, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} > 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (Теорема 11.10).

Ответ: $x \in (0;\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} < 15.$

Решение. ОДЗ неравенства $x > 0.$

Преобразуем выражение $x^{\log_2 5}$ по формуле 10 таблицы 10.2 п. 10.1.2.

$$x^{\log_2 5} = x^{\log_x 5\cdot\frac{\log_2 5}{\log_x 5}} = \left(x^{\log_x 5}\right)^{\frac{\log_2 5}{\log_x 5}} = 5^{\frac{\log_2 5}{\log_x 5}} = 5^{\frac{\log_2 5}{\log_2 5}\cdot\log_2 x} = 5^{\log_2 x}.$$

Получим неравенство, которое решаем с учетом ОДЗ.

$$3\cdot 5^{\log_2 x} < 15 \Leftrightarrow 5^{\log_2 x} < 5 \Leftrightarrow \log_2 x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Ответ: $x \in (0; 2).$

Пример 5. Решить неравенство $\log_{x^2}\left(x^2 - 4x + 3\right) > 1.$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{x^2}\left(x^2 - 4x + 3\right) > \log_{x^2} x^2.$

Применим теорему 11.14. Получим систему

$$\begin{cases} x^2 \ne 1 \\ x \ne 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \\ \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4x + 3 - x^2\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \pm 1 \\ x \ne 0 \\ (x-3)(x-1) > 0 \\ (x-1)(x+1)(4x-3) < 0. \end{cases}$$

Решая неравенства системы методом интервалов, получим систему

$$\begin{cases} x \ne \pm 1 \\ x \ne 0 \\ x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty) \\ x \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{3}{4}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{3}{4}; 1\right).$

Пример 6. Решить неравенство $\log_{10^x - 100}\left(10^{\frac{x}{2}} + 10\right) \le 1.$

Решение.

Запишем неравенство в виде $\log_{10^x - 100}\left(10^{\frac{x}{2}} + 10\right) \le \log_{10^x - 100}\left(10^x - 100\right).$

Применим теорему 11.14:

$$\begin{cases} 10^x - 100 \ne 1 \\ 10^x - 100 > 0 \\ 10^{\frac{x}{2}} + 10 > 0 \\ \left(10^x - 101\right)\left(10^{\frac{x}{2}} + 10 - 10^x + 100\right) \le 0. \end{cases}$$

Решаем неравенства системы:

$$\begin{cases} x \neq \lg 101 \\ 10^{\frac{x}{2}} + 10 > 0 \\ 10^x - 100 > 0 \\ \left(10^x - 101\right)\left(10^{\frac{x}{2}} + 10 - 10^x + 100\right) \le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \lg 101 \\ x \in R \\ x > 2 \\ \left(10^x - 101\right)\left(10^x - 10^{\frac{x}{2}} - 110\right) \ge 0. \end{cases}$$

Решим последнее неравенство методом интервалов. Сначала сделаем замену $t = 10^{\frac{x}{2}}, t > 0$. Получим равносильную систему неравенств

$$\begin{cases} t > 0 \\ \left(t^2 - 101\right)\left(t^2 - t - 110\right) = \left(t - \sqrt{101}\right)\left(t + \sqrt{101}\right)(t - 11)(t + 10) \ge 0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид $t \in \left(0; \sqrt{101}\right] \bigcup [11; \infty)$.

Переходя к переменной x, получим

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 10^{\frac{x}{2}} \le \sqrt{101} \Leftrightarrow 0 < 10^x \le 101 \Leftrightarrow x \le \lg 101 \\ 10^{\frac{x}{2}} \ge 11 \Leftrightarrow x \ge 2\lg 11. \end{array} \right.$$

В результате система из неравенств примет вид

$$\begin{cases} x \neq \lg 101 \\ x > 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \le \lg 101 \\ x \ge 2\lg 11 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \neq \lg 101 \\ x > 2 \\ x \le \lg 101 \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq \lg 101 \\ x > 2 \\ x \ge 2\lg 11 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(2; \lg 101\right) \\ x \in [2\lg 11; \infty). \end{array} \right.$$

Ответ: $x \in (2; \lg 101) \bigcup [2\lg 11; \infty)$.

В некоторых случаях приходится поочередно применять разные теоремы при решении неравенства, при этом полезно вспомнить, что при $0 < a \neq 1$, $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$.

Пример 7. Решить неравенство $0{,}3^{\log_{0,25} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$.

Решение. ОДЗ неравенства: $\begin{cases} \dfrac{3x+6}{x^2+2} > 0 \\ \log_2 \dfrac{3x+6}{x^2+2} > 0. \end{cases}$

Второе неравенство преобразуем в равносильное по теореме 11.13:

$$\log_2 \frac{3x+6}{x^2+2} > \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{3x+6}{x^2+2} > 1.$$

Запишем исходное неравенство в виде $0{,}3^{\log_{0,25}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}} > 0{,}3^0$.

Применим теорему 11.10. Получим равносильное неравенство

$$\log_{0,25}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2} < 0 = \log_{0,25}1.$$

Применим снова теорему 11.13:

$$\log_{0,25}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2} < \log_{0,25}1 \Leftrightarrow \log_2\frac{3x+6}{x^2+2} > 1 = \log_2 2.$$

Применим еще раз теорему 11.13.

Получим алгебраическое неравенство $\frac{3x+6}{x^2+2} > 2.$

Решение исходного неравенства равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{3x+6}{x^2+2} > 0 \\ \frac{3x+6}{x^2+2} > 1 \\ \frac{3x+6}{x^2+2} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3x+6}{x^2+2} > 2.$$

Решаем неравенство

$$\frac{3x+6}{x^2+2} > 2 \Leftrightarrow \frac{3x+6-2x^2-4}{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2 < 0.$$

И, наконец, $2x^2-3x-2<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Пример 8. Решить неравенство $\left(x^2-x+2\right)^{\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}} > 1.$

Решение. ОДЗ неравенства: $\begin{cases} x^2-x+2>0 \\ \frac{2x-3}{x+1} > 0. \end{cases}$

Запишем неравенство в виде $\left(x^2-x+2\right)^{\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}} > \left(x^2-x+2\right)^0$.

Применим теорему 11.11. С учетом ОДЗ получим систему

$$\begin{cases} x^2-x+2>0 \\ \frac{2x-3}{x+1}>0 \\ \left(x^2-x+1\right)\left(\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right) \\ \log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}>0. \end{cases}$$

В последнем неравенстве можно смело разделить на положительное при всех значениях x выражение $(x^2 - x + 1) > 0$. Применяя к последнему неравенству теорему 11.12, получим

$$\log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1} > \log_{0,6} 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 4).$$

В результате получим систему неравенств

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right) \\ x \in (-1; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2}; 4\right).$$

Ответ: $x \in \left(\frac{3}{2}; 4\right)$.

ГЛАВА 12
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

12.1. Общие теоретические сведения

12.1.1. Определение тригонометрических функций произвольного угла

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 12.1).

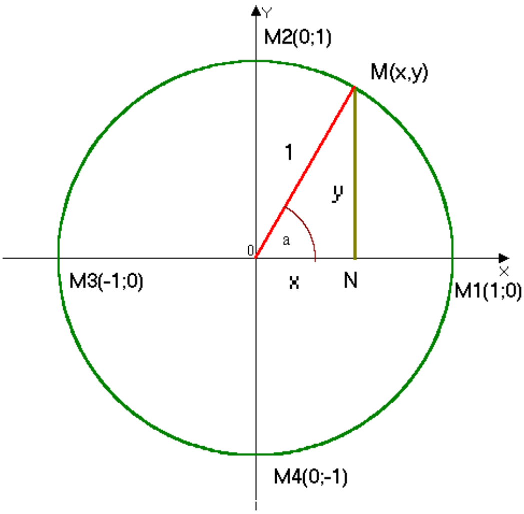


Рис. 12.1

Тригонометрическая окружность

Обозначим $M(x;y)$ произвольную точку на этой окружности.

Вектор $\overline{OM}$ соединяющий начало координат с точкой M, называется радиусом-вектором точки M или подвижным радиусом.

Радиус-вектор $\overline{OM_1}$ точки M_1 будем называть начальным радиусом-вектором. Направление вращения начального радиуса-вектора против часовой стрелки считается положительным.

Определение 12.1

Синусом угла α *называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, образующего угол* α *с осью абсцисс, к длине этого радиуса:*

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{MN}{OM} = y}$$

Определение 12.2

Косинусом угла α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{ON}{OM} = x}$$

Определение 12.3

Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу этого угла:

$$\boxed{tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}}$$

Определение 12.4

Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к синусу этого угла:

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}}$$

Таким образом, из определений следует, что синус и косинус угла α равны ординате и абсциссе конца подвижного радиуса единичной окружности, образующего угол α с начальным радиусом-вектором.

Из прямоугольного треугольника OMN следует, что $x^2 + y^2 = 1$, откуда имеем основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (12.1)$$

Разделив почленно тождество (12.1) на $\cos^2\alpha$, а затем на $\sin^2\alpha$, получим тождества:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \alpha \neq \pi n, n \in Z$$

12.1.2. Измерение углов и дуг

Углы часто измеряются в градусах, принимая за единицу измерения $\frac{1}{360}$ часть полного оборота радиуса-вектора, называемого градусом.

Углы, которые изучаются в тригонометрии могут измеряться любыми действительными числами, так как при вращении радиуса-вектора может образоваться угол произвольной величины.

Определение 12.5

Радианной мерой угла называется отношение длины дуги той части окружности, для которой данный угол является центральным, к длине радиуса этой окружности.

По определению имеем, что $\alpha(\text{рад}) = \frac{L}{R}$, где L — длина дуги окружности, R — радиус окружности. Если $L = R$, то $\alpha(\text{рад}) = 1$.

Тогда, при радианном измерении углов единицей измерения служит положительный центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу окружности (для окружности единичного радиуса эта длина равна 1).

При измерении дуг данной окружности за единицу принимают дугу, на которую опирается центральный угол, взятый за единицу измерения углов. Тогда величина центрального угла и величина дуги, на которую он опирается, выразятся одним и тем же числом в угловых и в дуговых единицах.

Можно записать, что $L = \alpha(\text{рад}) \cdot R$. Если $\alpha(\text{рад}) = 1$, то $L = R$ и, следовательно, при радианном измерении дуг окружности единицей измерения служит дуговой радиан: это есть дуга, равная по длине радиусу окружности (для окружности единичного радиуса эта длина равна 1).

Так как длина единичной окружности равна 2π, то можно составить пропорцию

$$2\pi \Leftrightarrow 360^0$$
$$\alpha(\text{рад}) \Leftrightarrow \alpha^0,$$

из которой следуют переходы от градусной меры к радианной и обратно:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha(\text{рад}) = \alpha^0 \dfrac{\pi}{180} \\ \alpha^0 = \alpha(\text{рад}) \dfrac{180}{\pi} \end{array}}$$

12.1.3. Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

Радиус-вектор $\overline{OM_1}$ образует с осью x угол, равный 0. Поскольку абсцисса точки $M_1(1;0)$ — косинус этого угла, а ордината — синус этого угла, то получим, что $x = \cos 0 = 1$, а $y = \sin 0 = 0$. Очевидно, что при вращении радиуса-вектора $\overline{OM_1}$ на целое число оборотов, т. е. на $2\pi n$, где $n \in Z$,будем получать углы с теми же значениями косинуса и синуса. Таким образом можно утверждать, что

$$\sin\alpha = 0 \text{ при } \alpha = 2\pi n, n \in Z,$$
$$\cos\alpha = 1 \text{ при } \alpha = 2\pi n, n \in Z. \quad (12.2)$$

Радиус-вектор $\overline{OM_2}$ образует с осью x угол $\frac{\pi}{2}$. Поскольку абсцисса точки $M_2(0;1)$ — косинус этого угла, а ордината — синус этого угла, то получим, что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, а $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Очевидно, что при вращении радиуса — вектора $\overline{OM_2}$ на целое число оборотов, т. е. на $2\pi n$, где $n \in Z$,будем получать углы с теми же значениями косинуса и синуса. Таким образом, можно утверждать, что

$$\sin\alpha = 1 \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$
$$\cos\alpha = 0 \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z. \quad (12.3)$$

Радиус-вектор $\overline{OM_3}$ образует с осью x угол π. Поскольку абсцисса точки $M_3(-1;0)$ — косинус этого угла, а ордината — синус этого угла, то получим, что $\cos\pi=-1$, а $\sin\pi=0$. Очевидно, что при вращении радиуса-вектора $\overline{OM_3}$ на целое число оборотов, т. е. на $2\pi n$, где $n\in Z$,будем получать углы с теми же значениями косинуса и синуса. Таким образом, можно утверждать, что

$$\sin\alpha=0 \text{ при } \alpha=\pi+2\pi n, n\in Z,$$
$$\cos\alpha=-1 \text{ при } \alpha=\pi+2\pi n, n\in Z. \qquad (12.4)$$

Радиус-вектор $\overline{OM_4}$ образует с осью x угол $\frac{3\pi}{2}$. Поскольку абсцисса точки $M_4(0;-1)$ — косинус этого угла, а ордината — синус этого угла, то получим, что $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, а $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$. Очевидно, что при вращении радиуса-вектора $\overline{OM_4}$ на целое число оборотов, т. е. на $2\pi n$, где $n\in Z$,будем получать углы с теми же значениями косинуса и синуса. Таким образом, можно утверждать, что

$$\sin\alpha=-1 \text{ при } \alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in Z,$$
$$\cos\alpha=0 \text{ при } \alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in Z. \qquad (12.5)$$

Составим таблицу значений тригонометрических функций рассмотренных углов.

Таблица 12.1

Таблица значений тригонометрических функций

α^0	α(рад)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0	0	0	1	0	------
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	------	0
180	π	0	-1	0	--------
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-------	0

Учитывая, что нули функций синус и косинус следуют через π, а значения ±1следуют через 2π, выражения (12.2–12.5) можно записать в более компактном виде, они представляют собой решения простейших тригонометрических уравнений, рассматриваемых подробно в главе 14.

$\sin\alpha=0$	$x=\pi n, n\in Z$
$\cos\alpha=0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$
$\sin\alpha=1$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$
$\sin\alpha=-1$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

$\cos\alpha = 1$	$x = 2\pi n, n \in Z$
$\cos\alpha = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Добавим к таблице значений тригонометрических функций углы, наиболее часто встречающиеся при решении задач.

α^0	α(рад)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

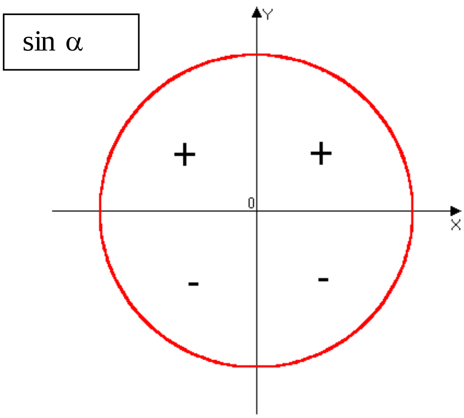


Рис. 12.2

Знаки функции $\sin\alpha$

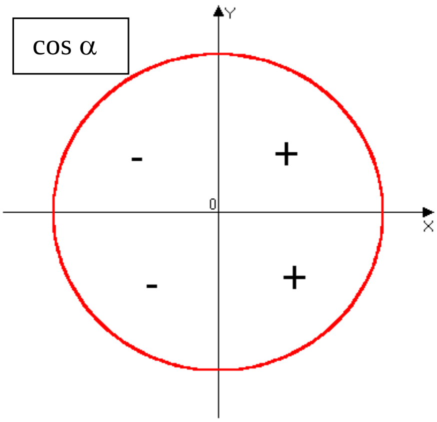


Рис. 12.3

Знаки функции $\cos\alpha$

12.1.4. Знаки тригонометрических функций

Так как $\sin\alpha = y$ есть ордината конца радиуса единичного круга, образующего угол α с осью OX, то значения синуса положительны (отрицательны) для углов, оканчивающихся в тех четвертях, в которых ординаты точек (y) положительны (отрицательны) (рис. 12.2).

Так как $\cos\alpha = x$ есть абсцисса конца радиуса единичного круга, образующего угол α с осью OX, то значения косинуса положительны (отрицательны) для углов, оканчивающихся в тех четвертях, в которых абсциссы точек (x) положительны (отрицательны) (рис. 12.3).

Так как $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ — суть отношения координат конца подвижного радиуса, то значения этих функций положительны (отрицательны) для углов, оканчивающихся в тех же четвертях, в которых координаты точек одинаковы (противоположны) по знаку (рис. 12.4).

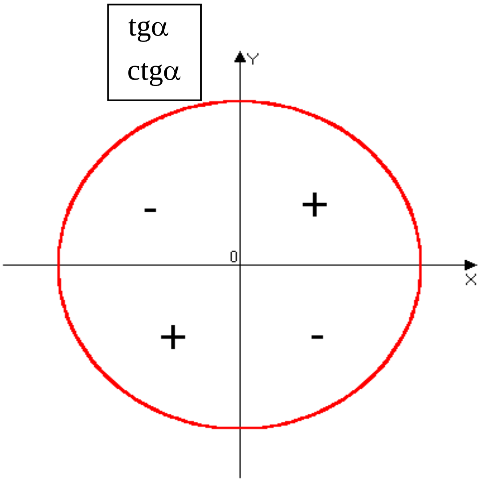


Рис. 12.4
Знаки функций $\text{tg}\alpha, \text{ctg}\alpha$

12.1.5. Четность и нечетность тригонометрических функций

Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$.
Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если $f(-x) = -f(x)$.
Для тригонометрических функций справедливы соотношения:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	Нечетная
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	Четная
$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$	Нечетная
$\text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg}\alpha$	Нечетная

12.1.6. Периодичность тригонометрических функций

Функция $f(x)$ называется периодической, если существует число $T > 0$ такое, что для любого x из области определения функции справедливо равенство

$$f(x+T) = f(x) = f(x-T).$$

Число T — называется периодом функции $f(x)$.

Все тригонометрические функции являются периодическими. При этом $T = 2\pi$ — основной (наименьший положительный) период функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, а $T = \pi$ — основной (наименьший положительный) период функций $\text{tg}\alpha$ и $\text{ctg}\alpha$.

Таким образом,

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha - 2\pi)$
$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha - 2\pi)$
$\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg}(\alpha - \pi)$
$\text{ctg}\alpha = \text{ctg}(\alpha + \pi) = \text{ctg}(\alpha - \pi)$

12.1.7. Графики тригонометрических функций

При построении графиков тригонометрических функций значения аргумента изображается точками на оси абсцисс (а не единичной окружности); поэтому аргумент тригонометрической функции будем обозначать буквой x (вместо α). Графики тригонометрических функций представлены на рисунках 12.5–12.8.

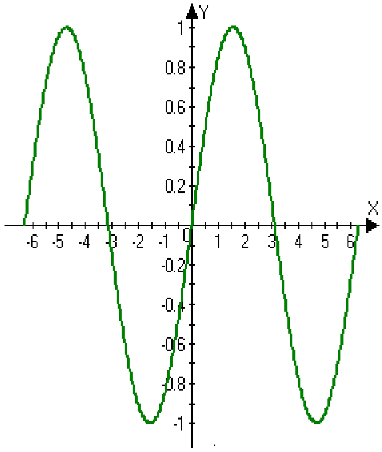


Рис. 12.5

График функции $y = \sin x$

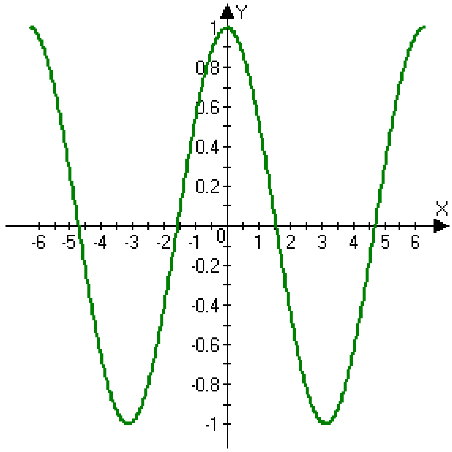


Рис. 12.6

График функции $y = \cos x$

Область определения: $x \in R$. Область значений: $-1 \le y \le 1$	Область определения: $x \in R$. Область значений: $-1 \le y \le 1$

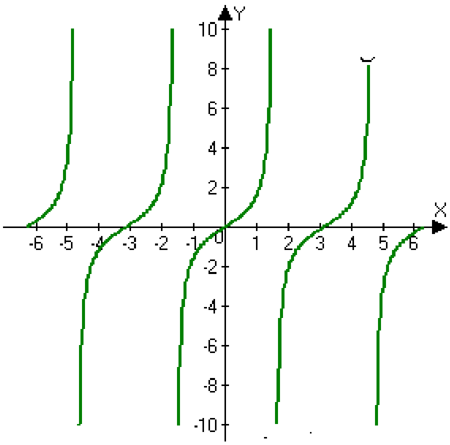


Рис. 12.7

График функции $y = \mathrm{tg}x$

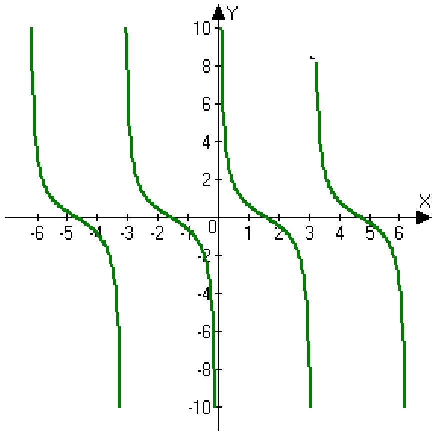


Рис. 12.8

График функции $y = \mathrm{ctg}x$

Область определения: $x \ne \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$ Область значений: $y \in R$	Область определения: $x \ne \pi n, n \in Z.$ Область значений: $y \in R$

12.1.8. Формулы приведения

Формулами приведения называются формулы, выражающие тригонометрические функции от аргументов:

$$-\alpha;\ \frac{\pi}{2}\pm\alpha;\ \pi\pm\alpha;\ \frac{3}{2}\pi\pm\alpha;\ 2\pi\pm\alpha$$

через функции от аргумента α, где α — произвольное (допустимое) значение аргумента.

При пользовании формулами приведения можно руководствоваться следующим правилом.

Правило.

1) *если угол* α *откладывается от горизонтального диаметра* (*формулы для углов* $-\alpha; \pi\pm\alpha; 2\pi\pm\alpha$), *функции в обеих частях равенства имеют одно и то же наименование; если угол* α *откладывается от вертикального диаметра* (*формулы для углов* $\frac{\pi}{2}\pm\alpha;\ \frac{3}{2}\pi\pm\alpha$), *то функции в обеих частях равенства имеют сходные наименования* (*синус и косинус, тангенс и котангенс*);

2) *для определения знака, с которым следует взять тригонометрическую функцию в правой части, достаточно, считая угол* α *острым, определить искомый по знаку левой части.*

Например, $\cos 150^{\circ} = \cos(180^{\circ} - 30^{\circ}) = -\cos 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Также верно, что $\cos 150^{\circ} = \cos(90^{\circ} + 60^{\circ}) = -\sin 60^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Знак «минус» в правой части обусловлен отрицательным значением косинуса для углов второй четверти, в которой находится угол 150^{0}.

Используя формулы приведения и периодичность функций, можно свести значения тригонометрических функций произвольного угла к тригонометрической функции острого угла.

Например,

$$\cos(-1000^{\circ}) = \cos(2\cdot 360^{\circ} + 280^{\circ}) = \cos 280^{\circ} = \cos(270^{\circ} + 10^{\circ}) = \sin 10^{\circ}.$$

$$\mathrm{tg}1846^{\circ} = \mathrm{tg}(10\cdot 180^{\circ} + 46^{\circ}) = \mathrm{tg}46^{\circ}.$$

Заметим, что для углов, больших чем 360^{0}, необходимо сначала исключить целое число оборотов.

Из формул приведения следуют две теоремы.

Теорема 12.1

Если сумма двух углов $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, *то*

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\alpha = \cos\beta \\ \sin\beta = \cos\alpha \\ \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta \\ \mathrm{tg}\beta = \mathrm{ctg}\alpha \end{array}}$$

Теорема 12.2

Если сумма двух углов $\alpha+\beta=\pi$*, то*

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha=\sin\beta\\&\cos\alpha=-\cos\beta\\&\mathrm{tg}\alpha=-\mathrm{tg}\beta\\&\mathrm{tg}\beta=-\mathrm{tg}\alpha\end{aligned}}$$

12.1.9. Основные соотношения между тригонометрическими функциями

Теоремы сложения для синуса и косинуса.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	(12.6)
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	(12.7)

Из данных двух формул можно получить большое количество формул тригонометрии. Лучше понять, как это можно сделать, чем запоминать множество формул.

Например, для получения формул $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$ необходимо в формулах (12.6 и 12.7) заменить угол β на $(-\beta)$ и вспомнить, что синус — нечетная функция, т. е. $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, а косинус — четная, т. е. $\cos(-\beta)=\cos\beta$.

Тогда получим:

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$	(12.8)
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	(12.9)

Если разделить выражение (12.6) на (12.7), то можно записать

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Деля числитель и знаменатель дроби одновременно на произведение $\cos\alpha\cos\beta$, получим формулу

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad (12.10)$$

Заменяя β на $(-\beta)$ и учитывая нечетность тангенса, получим формулу

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad (12.11)$$

Из полученных соотношений легко вывести формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму (разность).

Складывая (12.6) и (12.8) и деля на 2,получим

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2} \qquad (12.12)$$

Складывая (12.7) и (12.9) и деля на 2,получим

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad (12.13)$$

Вычитая из (12.9) выражение (12.7) и деля на 2, получим

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad (12.14)$$

Формулы (12.12–12.14) позволяют получить формулы преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение.

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (12.15)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (12.16)$$

Заменяя в (12.16) β на $(-\beta)$, получим формулу

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (12.17)$$

Заменяя в (12.15) β на $\pi+\beta$ и применяя формулы приведения, получим еще одну формулу

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (12.18)$$

Запишем формулы для синуса и косинуса двойного угла, получающиеся из выражений (12.6) и (12.7) при $\alpha=\beta$.

$$\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\end{aligned} \qquad (12.19)$$

Из последнего выражения получаются формулы **понижения степени.**

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha&=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\\ \sin^2\alpha&=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\end{aligned} \qquad (12.20)$$

Отметим еще две полезные формулы, получающиеся из (12.19) (получите самостоятельно).

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\\ \cos 2\alpha&=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\\ \alpha&\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\end{aligned} \qquad (12.21)$$

12.2. Доказательство тригонометрических тождеств

При доказательстве тригонометрических тождеств, как и при доказательстве тождеств вообще, необходимо последовательными преобразованиями выражения, стоящего в одной из его частей, получить выражение, составляющее другую часть тождества. Можно также доказывать, что разность выражений, стоящих в разных частях тождества равна нулю.

Во всех случаях принято в ответе указывать все те и только те значения аргументов, при которых тождество выполняется.

При доказательстве тождеств вначале важно определить, какую же часть тождества преобразовывать. Ответ на этот вопрос таков: более сложную.

1. Более сложной считается часть, у которой аргументы «загрязнены» по формулам приведения.

2. Более сложной следует считать часть, содержащую знаменатель, по сравнению с частью, где его нет.

3. Более сложной считается часть, в которой присутствует комбинация углов, при отсутствии комбинации в другой.

4. Более сложной считается часть, содержащая суммы (или разности) тригонометрических функций некоторых аргументов по сравнению с произведением функций тех же аргументов.

5. При наличии в одной части больших коэффициентов перед аргументами, чем в другой, более сложной считают первую.

После выбора левой или правой части необходимо, преобразуя выражение, помнить, что более простая часть тождества (другая его часть) должна служить ориентиром, к которому надо приближаться для решения задачи.

Пример 1. Доказать тождество $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$.

Решение. Более сложной частью здесь является левая.

Воспользуемся формулой двойного угла для косинуса.

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\left(2\cos^2\alpha - 1\right)^2 - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

Ответ: Левая часть равна правой части.

Пример 2. Доказать тождество $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\gamma \cdot \mathrm{tg}\alpha = 1,$ если $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Левая часть доказываемого тождества определена при $\alpha, \beta, \gamma \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$ Преобразуем левую часть выражения.

$$\mathrm{tg}\alpha(\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma) + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha(1 - \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma)\frac{\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma}{1 - \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma} + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma =$$

$$= \mathrm{tg}\alpha(1 - \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma)\mathrm{tg}(\beta + \gamma) + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma.$$

Учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$ запишем $\mathrm{tg}(\beta + \gamma) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$. Тогда получим, что левая часть равна $1 - \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\gamma = 1.$

Ответ: Левая часть равна правой части при $\alpha, \beta, \gamma \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

Пример 3. Доказать тождество $\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha = \dfrac{\cos^2 2\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha}$.

Решение. Правая часть тождества определена при $\sin\alpha \neq 0; \cos\alpha \neq 0; \mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha \neq 0.$

Откуда следует (см. таблицу 12.1), что $\alpha \neq \pi n; \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}.$

Кроме того,

$$\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\neq 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z.$$

(см. табл. 12.1).

Таким образом, приходим к выводу, что $\alpha\neq\frac{\pi n}{4}, n\in Z.$

Преобразуем левую часть доказываемого тождества.

$$\frac{1}{4}\sin 4\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\frac{\cos^2 2\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha\frac{\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{2}\cos^2 2\alpha\frac{2}{\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\cos^2 2\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}.$$

Применены формулы (12.19) и (12.21).

Ответ: Левая часть равна правой части при $\alpha\neq\frac{\pi n}{4}, n\in Z.$

Во многих случаях, когда имеется произведение вида $\sin\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha$ или вида $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha$, оказывается полезным прием, который заключается в том, что данное выражение умножают и делят на $\cos\alpha$ или $\sin\alpha$, с тем, чтобы использовав формулу $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$, а затем формулу $2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\sin 4\alpha$ и т. д. упростить заданное выражение.

Пример 4. Проверить равенство $\sin 10^o\cdot\sin 50^0\cdot\sin 70^o=\frac{1}{8}.$

Решение. В примерах данного типа можно вспомнить теорему 12.1, согласно которой синус некоторого острого угла равен косинусу угла, дополняющего острый до угла в 90^o.

Тогда исходное выражение можно представить в виде $\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0.$

В соответствии с изложенным, умножим и разделим его на $2\sin 20^o$.

$$\frac{2\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0}{2\sin 20^0}=\frac{\sin 40^0\cos 40^0\cos 80^0}{2\sin 20^0}=$$

$$=\frac{2\sin 40^0\cos 40^0\cos 80^0}{4\sin 20^0}=\frac{\sin 80^0\cos 80^0}{4\sin 20^0}=\frac{2\sin 80^0\cos 80^0}{8\sin 20^0}=$$

$$=\frac{\sin 160^0}{8\sin 20^0}=\frac{1}{8}.\ (\text{По теореме 12.2: } \sin 160^0=\sin 20^0.)$$

Для решения данного примера можно было применить формулы преобразования произведения в сумму (12.12–12.14).

При этом выбираем такие пары углов, чтобы после перемножения функций получить угол, синус или косинус которого известен.

$$\sin 10^0 \sin 50^0 \sin 70^0 = \left(\frac{\cos 40^0 - \cos 60^0}{2}\right)\sin 70^0 = \left(\frac{\cos 40^0 - \frac{1}{2}}{2}\right)\sin 70^0 =$$

$= \frac{2\cos 40^0 \sin 70^0 - \sin 70^0}{4} = \frac{\sin 110^0 + \sin 30^0 - \sin 70^0}{4} = \frac{1}{8}$. (По теореме 12.2: $\sin 110^0 = \sin 70^0$.)

Ответ: равенство верно.

12.3. Вычисление и преобразование тригонометрических выражений

Пример 5. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $180^o < \alpha < 270^o$.

Решение.

Воспользуемся формулами понижения степени (12.20).

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1+\cos\frac{\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}}.$$

Определим $\cos\frac{\alpha}{2}$.

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-0{,}6}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Знак минус выбран, так как угол $90^o < \frac{\alpha}{2} < 135^0$ принадлежит второй четверти и $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$.

Так как $45^o < \frac{\alpha}{4} < 67{,}5^0$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} > 0$ и

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)^2}{20}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 6. Вычислить выражение $\sin^4\left(\frac{\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{16}\right)$.

Решение. Вспомним теорему (12.1). Так как суммы углов $\frac{\pi}{16}$ и $\frac{7\pi}{16}$, а также $\frac{3\pi}{16}$ и $\frac{5\pi}{16}$ составляют $\frac{\pi}{2}$, то исходное выражение имеет более простой вид: $\sin^4\left(\frac{\pi}{16}\right)+\cos^4\left(\frac{\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{16}\right)+\cos^4\left(\frac{3\pi}{16}\right)$.

Выделяя полные квадраты и применяя формулу синуса двойного угла, получим

$$\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)^2-2\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right)+\left(\sin^2\left(\frac{3\pi}{16}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)^2-$$

$$-2\sin^2\left(\frac{3\pi}{16}\right)\cos^2\left(\frac{3\pi}{16}\right)=2-\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

Углы $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{3\pi}{8}$ в сумме составляют $\frac{\pi}{2}$.

Тогда $2-\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{2}=2-\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}-=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Пример 7. Представить в виде произведения выражение

$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha$.

Решение.

При суммировании выражений такого вида, где углы образуют арифметическую прогрессию, применяют метод умножения каждого члена суммы на выражение $2\sin\frac{\alpha}{2}$, где $\frac{\alpha}{2}$ — половина разности прогрессии (при этом делят все полученное выражение на эту же величину (чтобы значение исходного выражения не изменилось)).

Тогда получим

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 3\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 4\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{7\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{7\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{5\alpha}{2}\sin 2\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\frac{5\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=4\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{5\alpha}{2}.$$

Данный пример можно решить проще, если сразу сгруппировать слагаемые так, чтобы после преобразования появился общий множитель.

$$(\sin\alpha+\sin 3\alpha)+(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)=2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\sin 3\alpha\cos\alpha=$$

$$=2\cos\alpha\left(\sin 2\alpha+\sin 3\alpha\right)=4\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{5\alpha}{2}.$$

Ответ: $4\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{5\alpha}{2}$.

ГЛАВА 13
ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

13.1. Обратная функция и ее график

Пусть дана возрастающая или убывающая функция

$$y = f(x), \tag{13.1}$$

определенная на некотором промежутке $[a,b]$ $(a < b)$ (рис. 13.1).

Пусть $f(a) = c, f(b) = d$. Рассмотрим значение x_0, принадлежащее промежутку $[a,b]$. Этому x_0 соответствует значение функции y_0. Справедливо и обратное, т. е. между значениями x и соответствующими значениями y устанавливается взаимно однозначное соответствие. Рассматривая значения y как значения аргумента, а значения x как значения функции, получим x как функцию аргумента y:

$$x = \varphi(y). \tag{13.2}$$

Эта функция называется обратной для функции $y = f(x)$.

Область определения функции $y = f(x) -$ промежуток $a \le x \le b$.

Область значений функции $y = f(x) -$ промежуток $c \le y \le d$.

Для обратной функции область определения совпадает с областью значения прямой функции, а область значений обратной функции совпадает с областью определения прямой функции, т. е.

1) область определения функции $y = \varphi(x)$ — промежуток $c \le x \le d$;

2) область значений функции $y = \varphi(x)$ — промежуток $a \le y \le b$.

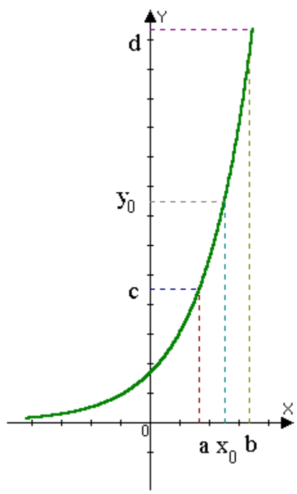


Рис. 13.1

Возрастающая функция на промежутке $[a,b]$

Заметим, что обратная функция $x=\varphi(y)$ находится путем решения уравнения $y=f(x)$ относительно x.

Например, если дана функция $y=e^x$, определенная на интервале $x\in(-\infty;\infty)$, то она имеет обратную $x=\ln y$. Область определения обратной функции $0<y<\infty$ (рис. 13.2).

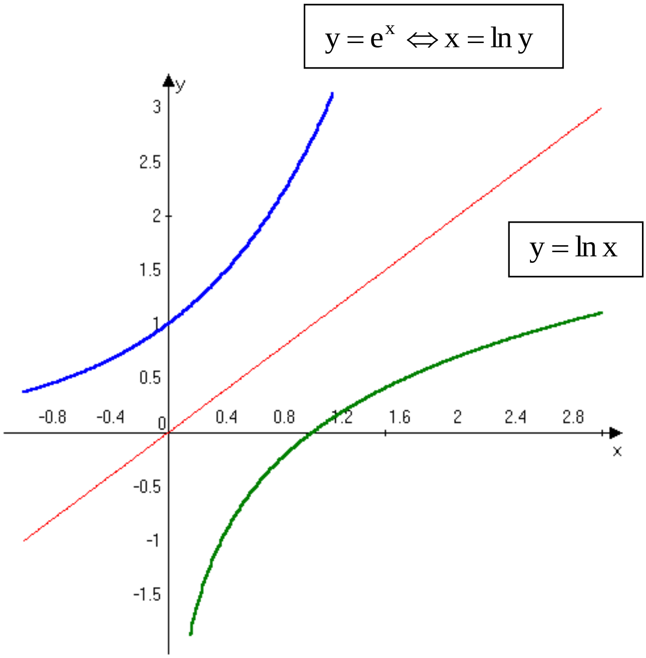


Рис. 13.2

Взаимно-обратные функции $y=e^x$, $y=\ln x$

Очевидно, что и функция $y=f(x)$ является обратной для функции $x=\varphi(y)$. Если функции $x=\varphi(y)$ и $y=f(x)$ являются взаимно обратными, то графиками их является одна и та же кривая (рис. 13.2). Если же аргумент обратной функции мы обозначим снова через x, а функцию через y и построим их в одной координатной системе, то получим уже два различных графика (рис. 13.3).

Рассмотрим еще один пример. Для функции $y=f(x)=\sin x$ можно записать обратную функцию $x=\varphi(y)$ (табл. 13.1).

Очевидно, что точки (x,y) и (y,x) на графиках, построенных по столбцам 1,3 и 3,4 таблицы 13.1 будут одни и те же.

Легко увидеть и доказать, что точки (x,y) и (x,y) на графиках, построенных по столбцам 1,2 и 5,6 таблицы 13.1 будут симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла, что видно по пяти точкам графиков, построенных по этой таблице (рис. 13.3).

Таблица 13.1

Функции

$y = f(x) = \sin x$, $x = \varphi(y) = \sin y$ $y = \varphi(x) = \arcsin x$

1	2	3	4	5	6
x	$y = f(x)$	y	$x = \varphi(y)$	x	$y = \varphi(x)$
0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$

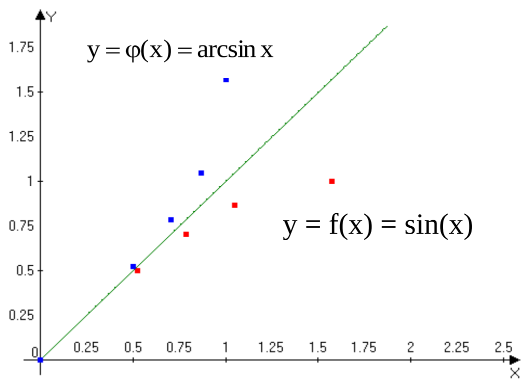


Рис. 13.3

Взаимно-обратные функции $y = \sin x$, $y = \arcsin x$

13.2. Определение обратных тригонометрических функций

1. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, где функция монотонно возрастает (рис.13.4). Очевидно, что $y \in [-1;1]$.

Функция, обратная к функции $y = \sin x$, рассмотренная на отрезке $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, называется $y = \arcsin x$. Тогда можно сказать, что в таблице 13.1 представлены значения функции $y = \arcsin x$. Аргумент этой функции $x \in [-1;1]$.

Таким образом, арксинус некоторого числа $x \in [-1;1]$ есть число $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ такое, что его синус равен x (рис. 13.4).

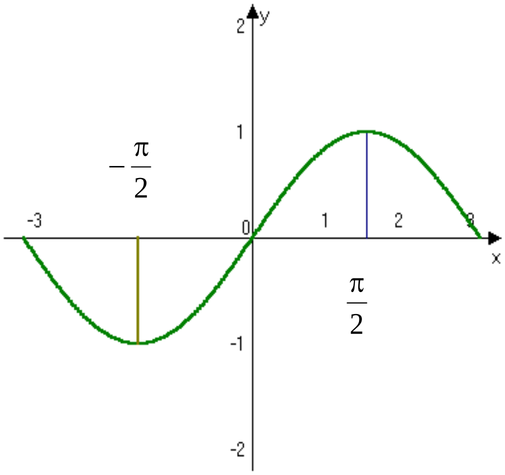


Рис. 13.4

График функции $y = \sin x$

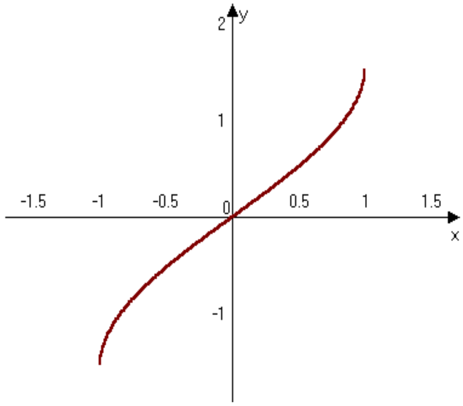


Рис. 13.5

График функции $y = \arcsin x$

$y = \arcsin x$
Область определения: $-1 \le x \le 1$
Область значений: $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

2. Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на отрезке $[0;\pi]$, где функция монотонно убывает (рис. 13.6). Очевидно, что $y \in [-1;1]$.

Функция, обратная к функции $y = \cos x$, рассмотренная на отрезке $y \in [0;\pi]$, называется $y = \arccos x$. Аргумент этой функции $x \in [-1;1]$

Таким образом, арккосинус некоторого числа $x \in [-1;1]$ есть число $y \in [0;\pi]$ такое, что его косинус равен x (рис. 13.7).

$y = \arccos x$
Область определения: $-1 \le x \le 1$
Область значений: $y \in [0;\pi]$
Функция общего вида: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

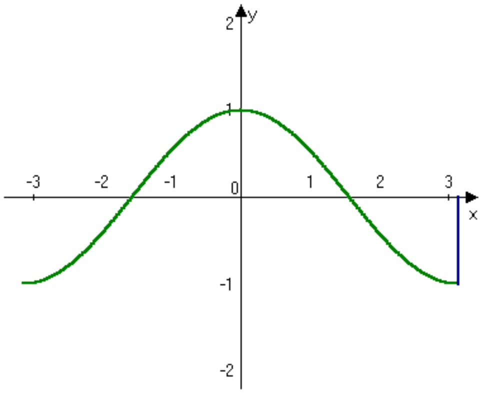


Рис. 13.6
График функции $y = \cos x$

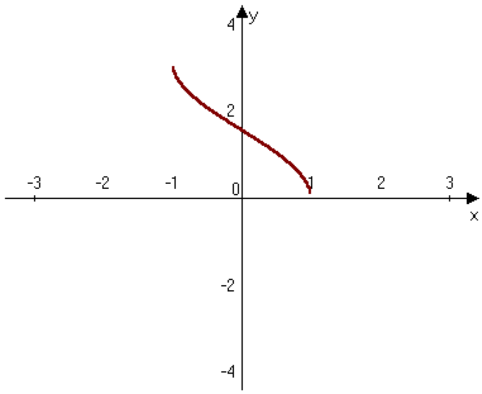


Рис. 13.7
График функции $y = \arccos x$

3. Рассмотрим функцию $y = \mathrm{tg}x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, где функция монотонно возрастает (рис. 13.8). Очевидно, что $y \in R$.

Функция, обратная к функции $y = \mathrm{tg}x$, рассмотренная на интервале $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, называется $y = \mathrm{arctg}x$. Аргумент этой функции $x \in R$.

Таким образом, арктангенс некоторого числа $x \in R$ есть число $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ такое, что его тангенс равен x (рис. 13.9).

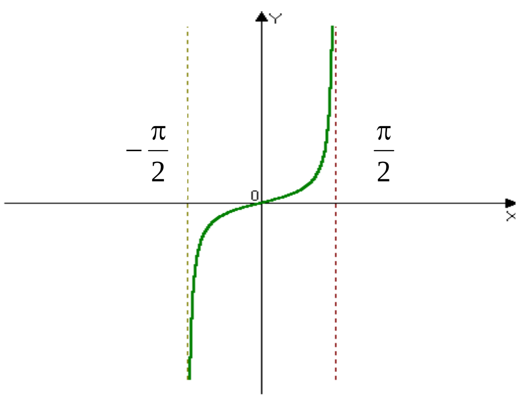


Рис. 13.8
График функции $y = \mathrm{tg}x$

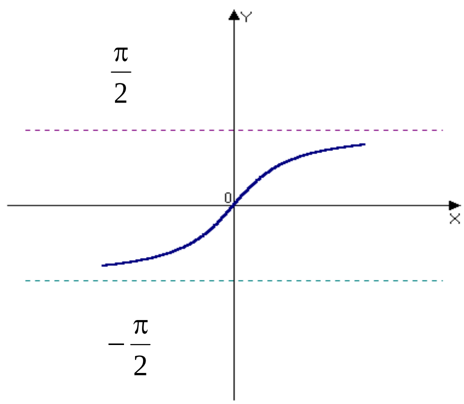


Рис. 13.9
График функции $y = \mathrm{arctg}x$

$y = \text{arctg}x$
Область определения: $x \in R$
Область значений: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
Функция нечетная: $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}x$

4. Рассмотрим функцию $y = \text{ctg}x$ на интервале $(0; \pi)$, где функция монотонно убывает (рис. 13.10). Очевидно, что $y \in R$.

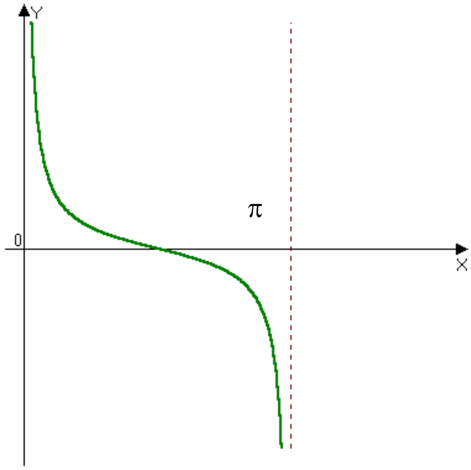


Рис. 13.10

График функции $y = \text{ctg}x$

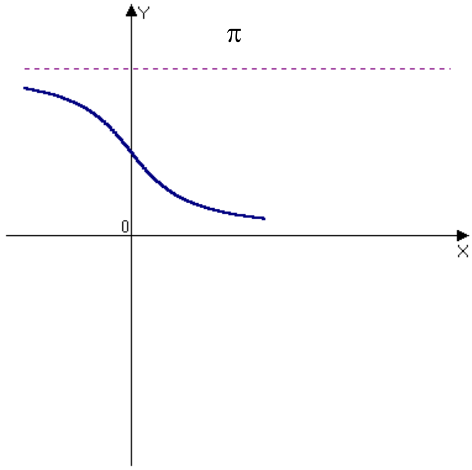


Рис. 13.11

График функции $y = \text{arcctg}x$

Функция, обратная к функции $y = \text{ctg}x$, рассмотренная на интервале $y \in (0; \pi)$, называется $y = \text{arcctg}x$. Аргумент этой функции $x \in R$.

Таким образом, арккотангенс некоторого числа $x \in R$ есть число $y \in (0; \pi)$ такое, что его котангенс равен x (рис. 13.11).

$y = \text{arcctg}x$
Область определения: $x \in R$
Область значений: $y \in (0; \pi)$
Функция общего вида: $\text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$

Отметим, что для обратных тригонометрических функций справедливы тождества:

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
$\text{arctg}x + \text{arcctg}x = \frac{\pi}{2}$

13.3. Доказательство тождеств и преобразование выражений с обратными тригонометрическими функциями

Заметим, что если углы равны, то равны между собой и любые тригонометрические функции, взятые от этих углов в области допустимых значений. Обратное утверждение неверно. Например, углы 0 и π не равны между собой, а синусы этих углов равны 0.

Но, если рассматривать тригонометрические функции в области монотонности, то между углами и тригонометрическими функциями будет взаимно однозначное соответствие. В этом случае равным тригонометрическим функциям соответствуют равные углы. Это обстоятельство определяет порядок доказательств тождеств.

Тождества с обратными функциями, вида $\alpha=\beta$, обычно доказывают в два этапа:

1) определяют расположение углов α и β в четвертях;

2) вычисляют значения тригонометрической функции $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$ от обеих частей доказываемого тождества и проверяют, что $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$. При этом выбирается такая тригонометрическая функция, которая при данном расположении углов монотонна.

Тогда из равенства $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ следует, что $\alpha=\beta$.

Пример 1. Доказать тождество $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$, $x\in[-1;1]$.

Решение. Обозначим $\alpha=\arccos(-x)$. Тогда $\cos\alpha=-x$ и $0\le\alpha\le\pi$.

Обозначим $\beta=\arccos x$. Тогда $\cos\beta=x$ и $0\le\beta\le\pi$.

Переформулируем задачу: необходимо доказать, что $\alpha=\pi-\beta$, если $\cos\alpha=-x$, $0\le\alpha\le\pi$ и $\cos\beta=x, 0\le\beta\le\pi$.

1. Итак, левая часть тождества — угол, расположенный в промежутке $0\le\alpha\le\pi$. Определим расположение угла $\pi-\beta$.

Умножим обе части неравенства $0\le\beta\le\pi$ на (-1), получим $-\pi\le-\beta\le 0$.

Далее, прибавим π к обеим частям этого неравенства. Тогда $0\le\pi-\beta\le\pi$. Итак, видим, что и правая часть доказываемого тождества — угол, расположенный в том же промежутке, что и угол α.

2) На этом промежутке монотонной является функция — косинус.

Вычислим косинусы от обеих частей доказываемого тождества. Получим верное равенство $\cos\alpha=\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta=-x$, при $x\in[-1;1]$.

Тождество доказано.

Пример 2. Доказать тождество $\mathrm{acrtg}x=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arcctg}x$.

Решение. Обозначим $\alpha=\mathrm{arctg}x$. Тогда $\mathrm{tg}\alpha=x$, $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Обозначим $\beta=\mathrm{arcctg}x$. Тогда $\mathrm{ctg}\beta=x$, $0<\beta<\pi$.

Переформулируем задачу.

Доказать, что $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, если $\mathrm{tg}\alpha = x$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{ctg}\beta = x$, $0<\beta<\pi$.

1. Угол α находится в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Определим расположение угла $\frac{\pi}{2}-\beta$. Умножим обе части неравенства $0<\beta<\pi$ на (-1), получим $-\pi<-\beta<0$. Далее, прибавим $\frac{\pi}{2}$ к обеим частям неравенства.

Тогда имеем $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$.

Итак, видим, что и правая часть доказываемого тождества — угол, расположенный в том же интервале, что и угол α.

На этом интервале монотонной является функция — тангенс (или синус).

2. Будем вычислять тангенс. Тогда можно записать, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\mathrm{ctg}\beta = x.$$

Тождество доказано.

Пример 3. Вычислить $\mathrm{tg}\left(2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

Решение. Обозначим $\alpha=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.Тогда $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Теперь задача формулируется следующим образом.

Найти $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$, $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Перед корнем выбирается знак плюс, так как угол α находится во второй четверти, где синус положителен. Тогда $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{8}{9}-1}=4\sqrt{5}.$

Ответ: $4\sqrt{5}.$

Пример 4. Вычислить $2\mathrm{arctg}2-\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$.

Решение. Обозначим $\alpha=\mathrm{arctg}2$. Тогда $\mathrm{tg}\alpha=2$ и $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ($\mathrm{tg}\alpha=2>\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$).

Обозначим $\beta = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Тогда $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. Тогда необходимо вычислить угол $\gamma = 2\alpha - \beta$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}, 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$.

Определим положение угла γ. Легко получить, что

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \\ -\frac{\pi}{4} < -\beta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \gamma = 2\alpha - \beta < \pi.$$

Определим котангенс от угла γ.

Получим $\operatorname{ctg}(2\alpha - \beta) = \frac{1 + \operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{4}{3}$,

$$\operatorname{ctg}(2\alpha - \beta) = \frac{1 + \operatorname{tg}2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{3}{4}}{-\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = 0.$$

Итак получили, что котангенс искомого угла равен 0, а сам угол находится в интервале $\frac{\pi}{4} < \gamma = 2\alpha - \beta < \pi$. Таким углом может быть только угол $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Вычислить $\gamma = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$.

Решение. Легко увидеть, что $\gamma = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) - \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right) =$
$= \varphi - \pi$, где $\varphi = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) + \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$.

Обозначим $\alpha = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)$, тогда $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Обозначим $\beta = \arccos\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$, тогда $\cos\beta = \frac{11}{\sqrt{130}}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Задача формулируется теперь так:

Определить $\gamma = \varphi - \pi = \alpha + \beta - \pi$, если $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и $\cos\beta = \frac{11}{\sqrt{130}}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Определим угол φ. Очевидно, что этот угол находится в промежутке $0 < \varphi = \alpha + \beta < \pi$.

Вычислим сначала $\sin\varphi = \sin(\alpha + \beta)$.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{\sqrt{65}}\frac{11}{\sqrt{130}}+\cos\alpha\sin\beta.$$

Далее, запишем $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{65}}=\frac{7}{\sqrt{65}}$, $\sin\beta=\sqrt{1-\frac{121}{130}}=\frac{3}{\sqrt{130}}$ и, следовательно, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{\sqrt{65}}\frac{11}{\sqrt{130}}+\frac{7}{\sqrt{65}}\frac{3}{\sqrt{130}}=\frac{65}{\sqrt{65}\sqrt{130}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Синус искомого угла, расположенного в промежутке $0<\varphi=\alpha+\beta<\pi$, равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Таких углов в данном промежутке два: $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Решение задачи оказалось неоднозначным, так как в промежутке $0<\varphi=\alpha+\beta<\pi$ монотонной является функция косинус, а не синус, который мы вычисляли.

Таким образом, правильно было вычислять $\cos\varphi$.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{7}{\sqrt{65}}\frac{11}{\sqrt{130}}-\frac{3}{\sqrt{130}}\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{65}{\sqrt{130}\sqrt{65}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Теперь можно однозначно утверждать, что в рассматриваемом промежутке расположен угол $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Следовательно $\gamma=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3}{4}\pi$.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4}$.

Пример 6. Вычислить $\arcsin(\sin 5)$.

Решение. Отметим сразу, что ответ не может быть равен 5, так как число 5 не принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Обозначим $\alpha=\arcsin(\sin 5)$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}\alpha=\arcsin(\sin 5)\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha-\sin 5=0\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos\frac{\alpha+5}{2}\sin\frac{\alpha-5}{2}=0.\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к решению совокупности из двух систем, состоящих из уравнения и неравенства. Причем решение имеет только одна система.

$$\begin{cases}2\cos\frac{\alpha+5}{2}\sin\frac{\alpha-5}{2}=0\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos\frac{\alpha+5}{2}=0\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\frac{\alpha-5}{2}=0\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{\alpha+5}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{\alpha-5}{2}=\pi k\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}, k\in Z\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha=\pi+2\pi n-5\\ -\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha=2\pi k+5\\ -\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}, k\in Z\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha=\pi+2\pi n-5\\ -\dfrac{\pi}{2}\le\pi+2\pi n-5\le\dfrac{\pi}{2}, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha=2\pi k+5\\ -\dfrac{\pi}{2}\le 2\pi k+5\le\dfrac{\pi}{2}, k\in Z\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha=\pi+2\pi n-5\\ -\dfrac{1}{2}\le 1+2n-\dfrac{5}{\pi}\le\dfrac{1}{2}, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha=2\pi k+5\\ -\dfrac{1}{2}\le 2k+\dfrac{5}{\pi}\le\dfrac{1}{2}, k\in Z\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha=\pi+2\pi n-5\\ -\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{2\pi}\le n\le-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{2\pi}, n\in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha=2\pi k+5\\ -\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{2\pi}\le k\le\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{2\pi}, k\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Неравенство первой системы совокупности решений не имеет, решение неравенства второй системы $k=-1$. Тогда искомый угол равен $5-2\pi$.

Ответ: $5-2\pi$.

Пример 7. Вычислить $\arccos(\cos 250^0)$.

Решение. Здесь можно применить формулы приведения.

$$\arccos(\cos 250^0)=\arccos(\cos(180^0+70^0))=\arccos(-\cos 70^0)=$$

$$=\pi-\arccos(\cos 70^0)=\pi-\frac{\pi}{180}70=\frac{11}{18}\pi.$$

Ответ: $\dfrac{11}{18}\pi$.

Пример 8. Построить график функции $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$.

Решение. $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)\leftrightarrow \mathrm{tg}y=\mathrm{tg}x$, $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Получаем систему $\begin{cases}\mathrm{tg}y-\mathrm{tg}x=0\\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$, состоящую из уравнения и неравенства.

$$\begin{cases}\mathrm{tg}y-\mathrm{tg}x=0\\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sin(y-x)}{\cos y\cos x}=0\\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(y-x)=0\\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+\pi n, n\in Z\\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

График функции представляет собой отрезки параллельных прямых, расположенных на расстоянии π друг от друга и ограниченных в области значений функции прямыми $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 13.12).

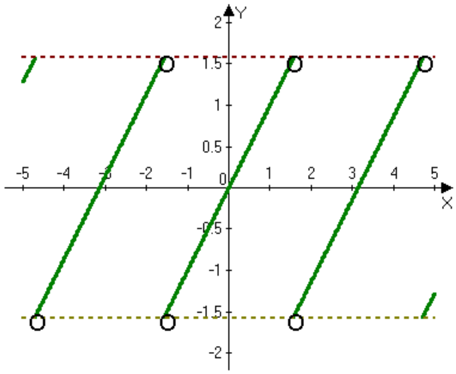


Рис. 13.12

График функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$

13.4. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

13.4.1. Простейшие уравнения

К этому типу уравнений относятся четыре уравнения.

1. $\arcsin x = a$.

Решение этого уравнения сводится к решению системы

$$\begin{cases} x = \sin a \\ -\dfrac{\pi}{2} \le a \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2. Аналогично: $\arccos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos a \\ 0 \le a \le \pi. \end{cases}$

3. Аналогично: $\operatorname{arctg} x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{tg} a \\ -\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

4. Аналогично: $\operatorname{arcctg} x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{ctg} a \\ 0 < a < \pi. \end{cases}$

Любое уравнение после преобразований сводится к простейшему.

13.4.2. Решение уравнений методом анализа области допустимых значений

Решение уравнений такого типа, как правило, исчерпывается нахождением общей части областей определения входящих в уравнение функций. При этом общая часть является либо пустым множеством (в этом случае решений нет), либо содержит конечный набор чисел, проверить каждое из которых не составляет большого труда.

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}+\arccos\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$.

Решение.

1. Найдем ОДЗ: $\begin{cases}-1\le\frac{1}{\sqrt{x}}\le 1\\ -1\le\sqrt{1-x}\le 1\\ x>0\\ 1-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}\ge 1\\ x\ge 0\\ x>0\\ x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

2. Подставим это значение в левую часть уравнения: $\arcsin 1+\arccos 0=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$

Так как правая часть равна $\frac{\pi}{2}$, то левая и правая части не равны. Следовательно, решений нет.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Пример 2. Решить уравнение $\arccos\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}(1-x)$.

Решение.

1. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2}\le 1\\ \frac{1}{x^2}\ge -1\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[1;\infty). \qquad (*)$$

В данном случае ОДЗ не является пустым множеством и не содержит конечный набор чисел, однако, с учетом того, что значения функции арккосинус заключены в промежутке $[0;\pi]$, можно записать еще два неравенства:

$$0\le\arccos\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}(1-x)\le\pi\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-x)\le\pi\\ \frac{\pi}{2}(1-x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le 1. \qquad (**)$$

Пересечением множеств (*) и (**) будут только два значения $x=-1$ и $x=1$.

2. Подставим эти значения в исходное уравнение, получим:

при x = 1 $\arccos 1=\frac{\pi}{2}(1-1)=0$ и левая часть равна правой части;

при x = –1 $\arccos 1\ne\pi$ и, следовательно, x = –1 не является решением уравнения.

Ответ: x = 1.

13.4.3. Уравнения, сводящиеся к уравнениям относительно некоторой функции одного и того же аргумента

Отличительным признаком такого вида уравнений является наличие в обеих частях только лишь арксинуса и арккосинуса (либо арктангенса и арккотангенса) одного и того же аргумента.

В этом случае, сделав замену $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ (либо $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$), получим уравнение, содержащее только лишь арксинус (либо арккотангенс), находя который, получаем простейшее уравнение.

Пример 3. Решить уравнение $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{\pi^2}{2}$.

Решение. ОДЗ уравнения: $-1 \le x \le 1$. Заменим $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

$\arcsin^2 x + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}$. Заменим $\arcsin x = t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Получим квадратное уравнение: $t^2 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}$.

$2t^2 + \frac{\pi^2}{4} - \pi t = \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - \pi t - \frac{\pi^2}{4} = 0$, корнями которого являются следующие числа $t_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\pi$, $t_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}\pi$. Условию $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет только корень $t_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}\pi$. Откуда, решая простейшее уравнение $\arcsin x = \frac{1-\sqrt{3}}{4}\pi$, получим ответ $x = \sin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\pi\right)$.

Ответ: $x = \sin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\pi\right)$.

13.4.4. Общий метод решения

В уравнениях этого типа либо одна, либо обе его части являются суммами некоторых аркфункций с различными аргументами, причем такими, что их ОДЗ не допускает простого решения (как это было в п. 13.4.2).

Общим приемом решения уравнений является взятие некоторой тригонометрической функции от обеих его частей.

В этом случае обязательна проверка полученных решений, так как равенство тригонометрических функций углов не гарантирует равенства самих углов.

Пример 4. Решить уравнение $\arcsin(1-x) - 2\arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

1. Найдем ОДЗ уравнения, для чего составим и решим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} -1 \le 1 - x \le 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1.$$

2. Обозначим $\alpha = \arcsin(1-x)$. Тогда $\sin\alpha = 1 - x$, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Обозначим $\beta = \arcsin x$. Тогда $\sin\beta = x$, $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$.

Получим уравнение $\alpha - 2\beta = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\beta$.

Возьмем от обеих частей уравнения синус, после преобразований получим

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right) = \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta \Leftrightarrow 1 - x = 1 - 2x^2 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0.$$

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = \frac{1}{2}.$$

3. Проверка:

а) $x = 0$, $\arcsin(1-0) - 2\arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$. Левая часть равна правой части и поэтому $x = 0$ — корень уравнения;

б) $x = \frac{1}{2}$, $\arcsin(\frac{1}{2} - 0) - 2\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$. Левая часть уравнения не равна правой и следовательно $x = \frac{1}{2}$ — посторонний корень.

Ответ $x = 0$.

Пример 5. Решить уравнение $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.

Решение.

1. ОДЗ уравнения: $-1 \le x \le 1$.

Обозначим $\alpha = \arccos x$. Тогда $\cos\alpha = x$, $0 \le \alpha \le \pi$.

Обозначим $\beta = \operatorname{arctg} x$. Тогда $\operatorname{tg}\beta = x$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Получим уравнение $\alpha = \beta$.

2. Возьмем от обеих частей уравнения тангенс, после преобразований получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = x.$$

Решаем иррациональное уравнение $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = x$.

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2} - x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x^2 \\ x \ne 0. \end{cases}.$$

Получим уравнение $x^4+x^2-1=0; x\neq 0$. Решая уравнение, получим два значения $x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

3. Проверка.

Оба корня принадлежат отрезку $-1\leq x\leq 1$, но значения арккосинуса и арктангенса могут быть равны, т. е. $\arccos x=\operatorname{arctg} x$ только в первой четверти, где $0\leq x\leq 1$. Этому условию удовлетворяет только значение $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ: $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Пример 6. Решить уравнение $\cos(2\arccos x)=\arcsin(\cos x)$.

Решение.

Рассмотрим левую часть уравнения. Очевидно, что $-1\leq x\leq 1$. Обозначим $\alpha=\arccos x$. Тогда $x=\cos\alpha$. При этом левая часть уравнения $\cos(2\arccos x)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2x^2-1$.

Правая часть уравнения на промежутке $-1\leq x\leq 1$ равна:

$$\arcsin(\cos x)=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\frac{\pi}{2}-x \text{, при } x\in[0;1];$$

$$\arcsin(\cos x)=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\frac{\pi}{2}+x \text{, при } x\in[-1;0].$$

(Если обозначить $t=x+\frac{\pi}{2}$, то при $x\in[-1;0]\Rightarrow t\in\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right);\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $x=t-\frac{\pi}{2}$ и $\arcsin(\cos x)=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\arcsin[\sin(\pi-t)]$ = $=\arcsin(\sin t)=t=x+\frac{\pi}{2}$).

В результате запишем и решим две системы уравнений с неравенствами:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-1=\frac{\pi}{2}-x\\ 0\leq x\leq 1\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-1=\frac{\pi}{2}+x\\ -1\leq x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2+2x-(\pi+2)=0\\ 0\leq x\leq 1\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2-2x-(\pi+2)=0\\ -1\leq x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1+\sqrt{1+4(\pi+2)}}{4}\\ x=\frac{1-\sqrt{1+4(\pi+2)}}{4}\end{array}\right..$$

Ответ: $\left\{\frac{-1+\sqrt{4\pi+9}}{4};\frac{1-\sqrt{4\pi+9}}{4}\right\}$.

ГЛАВА 14
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

14.1. Тригонометрические уравнения

Для решения уравнений, содержащих тригонометрические функции, применимы все рассмотренные в главе 2 равносильные преобразования общего характера. Преобразования, допускающие появление посторонних корней, обычно не используются, так как проверка решений тригонометрических уравнений представляет собой непростую задачу.

14.1.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида $\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$

1. $\sin x = a.$

Так как при всех значениях x выполняется соотношение $|\sin x| \le 1$, то решения этого уравнения существуют лишь при $|a| \le 1$ и могут быть записаны в одном из двух видов (рис. 14.1):

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n \text{ и } x_2 = (\pi - \arcsin a) + 2\pi n = -\arcsin a + \pi(2n+1), n \in Z.$$

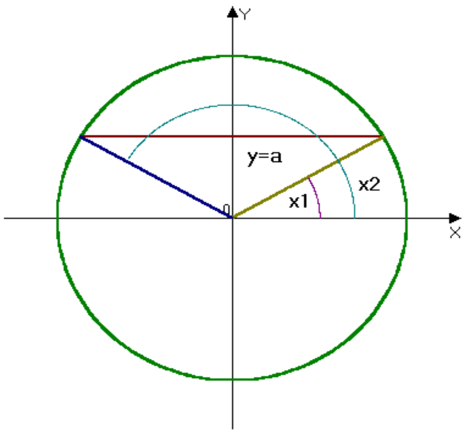


Рис. 14.1

К решению уравнения $\sin x = a$

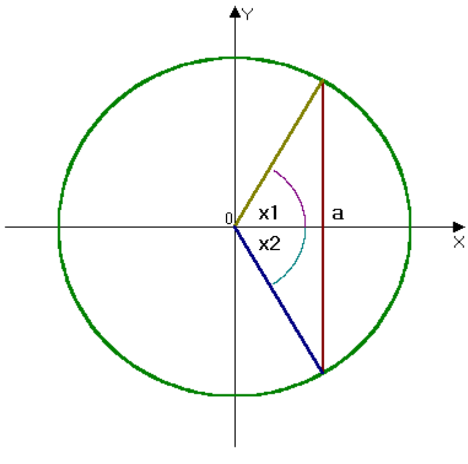


Рис. 14.2

К решению уравнения $\cos x = a$

Обычно эту совокупность записывают в более компактном виде:

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z}$$

Укажем несколько частных видов уравнений и приведем их решения (см. также п. 12.1.3).

$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

2. $\cos x = a.$

Аналогично для существования решений необходимо, чтобы $|a| \le 1$. Решение данного уравнения записывают в виде (рис. 14.2)

$$x_1 = \arccos x + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x_2 = -\arccos x + 2\pi n, n \in Z.$$

Обычно эту совокупность записывают в виде

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z}$$

Приведем решения нескольких частных видов уравнений (см. также раздел 12.1.3).

$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

3. $\mathrm{tg} x = a.$

Это уравнение имеет решение для любого действительного значения a.

В пределах значений углов $0 \le x \le 2\pi$ найдутся два угла x_1, x_2 с тангенсом, равным a (рис. 14.3).

$$\boxed{x = \mathrm{arctg} a + \pi n, n \in Z}$$

4. $\mathrm{ctg} x = a.$

Это уравнение имеет решение для любого действительного значения a. В пределах значений углов $0 \le x \le 2\pi$ найдутся также два угла x_1, x_2 с котангенсом, равным a (рис. 14.4).

$$\boxed{x = \mathrm{arcctg} a + \pi n, n \in Z}$$

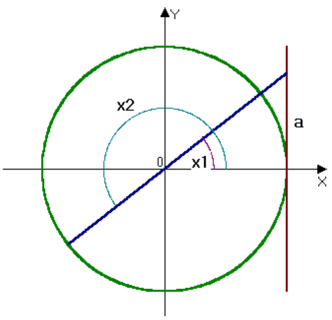


Рис. 14.3

К решению уравнения tgx = a

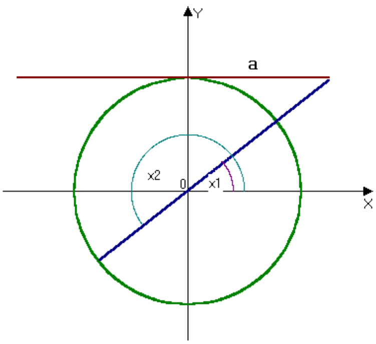


Рис. 14.4

К решению уравнения ctgx = a

Таким образом, в пределах значений углов $0 \le x \le 2\pi$ для всех четырех типов уравнений имеются два угла, удовлетворяющих их решению, кроме рассмотренных частных случаев $\sin x = \pm 1$ и $\cos x = \pm 1$.

Любое тригонометрическое уравнение в конечном счете приведется к простейшему.

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Так как $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, то

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Вычисляя далее, получим $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

14.1.2. Объединение и пересечение решений тригонометрических уравнений

Пусть в результате решения некоторого тригонометрического уравнения мы получили две серии решений:

$$x_1 = \frac{\pi n}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ n, k \in Z.$$

При некоторых значениях $n, k \in Z$ может получиться так, что значения x, полученные в различных сериях, будут совпадать, т. е. $x_1 = x_2$. Так, например, при n = 2, k = 0 $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Следует записывать серии таким образом, чтобы решения, получаемые в любой из них, не перекрывались с решениями, получающимися в других сериях.

Может получиться и так, что в результате решения некоторого уравнения мы получили решение $x_1 = \frac{\pi n}{4}$, а некоторое множество значений $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $n, k \in Z$ не входит в ОДЗ этого уравнения.

В этом случае принципиально важно исключить из серии x_1 перекрывающиеся с ней решения из серии x_2.

И, наконец, может случиться так, что решением какого либо тригонометрического уравнения является пересечение решений серий $x_1 = \frac{\pi n}{4}$ и $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $n, k \in Z$. В этом случае также необходимо уметь записывать пересечение этих решений.

В любом из перечисленных выше случаев необходимо узнать, при каких значениях $n,k \in Z$ решения в сериях будут совпадать, т. е. $x_1 = x_2$. Для рассматриваемого примера получим

$$x_1 = \frac{\pi n}{4} = x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow \frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow n = 2 + 4k \Leftrightarrow n - 4k = 2, n, k \in Z.$$

Теперь задача формулируется таким образом: необходимо найти все целочисленные решения уравнения $n - 4k = 2$.

Теорема 14.1

Все целочисленные решения уравнения вида

$$\boxed{an + bm = c, \qquad (14.1)}$$

где a, b *— целые взаимно простые числа, отличные от нуля,* c *— произвольное целое число, определяются формулами* (*14.2*)

$$\boxed{\begin{aligned} n &= n_0 - bt, \\ m &= m_0 + at,\ t \in Z, \qquad (14.2) \end{aligned}}$$

где n_0, m_0 *— какое-либо решение уравнения* (*14.1*) (*его можно искать подбором*).

Для решаемого уравнения подбором получим $n_0 = 2; k_0 = 0$.

Тогда a = 1, b = -4 и следовательно $n = 2 + 4t$, $k = t, t \in Z$.

Итак, мы получили, что в сериях $x_1 = \frac{\pi n}{4}$ и $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ при $n = 2 + 4t$ и $k = t, t \in Z$ решения будут совпадать $x_1 = x_2$.

В случае, если x_1 и x_2 — решения какого-либо уравнения, ответ необходимо записывать в виде

$$x_1 = \frac{\pi n}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ при } n \neq 2 + 4t,\ k, n, t \in Z \text{ или}$$

$$x_1 = \frac{\pi n}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ при } k \neq t; k, n, t \in Z.$$

Но что значит $k \neq t, t \in Z$, если k — целое число, которое не должно быть равно целому числу? Это обстоятельство свидетельствует о том, что решения серии x_2 полностью входят в серию x_1, и самый компактный ответ в задаче $x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z$.

В случае, если серия x_2 не входит в ОДЗ уравнения с решением x_1, то ответ необходимо записывать в виде

$$x_1 = \frac{\pi n}{4} \text{ при } n \neq 2 + 4t,\ k, n, t \in Z.$$

В случае, если нас интересует пересечение решений из серий x_1 и x_2, то это множество запишется в виде $x = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in Z$, для чего в решение $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ вместо переменной k надо подставить $k = t$, $t \in Z$ или в решение

$x_1 = \frac{\pi n}{4}$ вместо переменной n необходимо подставить $n = 2 + 4t,\ t \in Z$, что безразлично.

Объединение и пересечение решений можно также производить графически на круге, но это удобно для углов, которые «хорошо» изображаются на этом круге.

14.1.3. Разложение на множители

Часто используется прием, связанный с разложением на множители левой части уравнения и заменой его на равносильную совокупность уравнений.

Пример 2. Решить уравнение $2\sin 2x\cos x - \sin 2x = \cos x(2\cos x - 1)$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x \in R$. Вынесем за скобки в левой части множитель $\sin 2x$ и перенесем все члены уравнения в левую часть. Далее вынесем за скобки множитель $(2\cos x - 1)$.

$$\sin 2x(2\cos x - 1) - \cos x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin 2x - \cos x) = 0.$$

Можно далее продолжить разложение на множители, если заменить $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

$$(2\cos x - 1)(\sin 2x - \cos x) = \cos x(2\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0.$$

Далее получим совокупность из трех уравнений. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом имеют смысл.

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ \cos x = 0 \\ 2\sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ x_3 = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, k, n, m \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ x_3 = (-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, k, n, m \in Z.$

14.1.4. Приведение всех тригонометрических функций к одной функции одного аргумента

Если удается привести все тригонометрические функции, входящие в уравнение к одной, то получается, как правило, уравнение, решение которого хорошо изучено. При этом следует иметь в виду, что при приведении тригонометрического уравнения к степенному относительно некоторой одной тригонометрической функции, практически никогда не пользуются формулами

$$\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y} \text{ или } \cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$$

из-за сложности раскрытия знаковой неопределенности перед радикалами и появления иррациональности.

Пример 3. Решить уравнение $7 + 4\sin x\cos x + \frac{3}{2}(\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x) = 0$.

Решение. ОДЗ уравнения $\left[\begin{array}{l}\cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k \\ x \neq \pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi n}{2}, k, n \in Z.$

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$7+4\sin x\cos x+\frac{3}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=7+2\sin 2x+\frac{3}{\sin 2x}=0.$$

Сделаем замену $t=\sin 2x, |t| \leq 1$. Получим уравнение $2t^2+7t+3=0$.

Корнями уравнения являются числа $t_1=-\dfrac{1}{2}; t_2=-3$. Условию $|t| \leq 1$ удовлетворяет только корень $t=-\dfrac{1}{2}$.

Получим уравнение $\sin 2x=-\dfrac{1}{2}$. Откуда $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2} \in$ ОДЗ.

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}, n \in Z.$

14.1.5. Применение формул преобразования произведения в сумму

Этот распространенный прием применяется, когда уравнение содержит парные произведения синусов и (или) косинусов, а разложение на множители не получается.

Пример 4. Решить уравнение $\sin x \sin 7x=\sin 3x \sin 5x$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x \in R$. Заменим произведение суммами:

$$\frac{\cos 6x-\cos 8x}{2}=\frac{\cos 2x-\cos 8x}{2} \Leftrightarrow \cos 6x=\cos 2x \Leftrightarrow \cos 6x-\cos 2x=0.$$

$$\cos 6x-\cos 2x=-2\sin 4x\sin 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0 \\ \sin 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{\pi n}{4} \\ x_2=\dfrac{\pi k}{2}, n, k \in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi n}{4}$, $n \in Z$.

14.1.6. Применение формул преобразования суммы в произведение

Для решения уравнений, в обеих частях которого стоят суммы либо только синусов и косинусов, либо только тангенсов и котангенсов, члены уравнения группируют так, чтобы после перехода к произведениям каждое из них содержало бы один и тот же множитель. Далее применяют метод разложения на множители.

Пример 5. Решить уравнение $\sin 2x+\sin 3x+\cos 4x=\cos x$.

Решение. ОДЗ уравнения $x \in R$. Сгруппировав члены следующим образом: $(\sin 2x+\sin 3x)+(\cos 4x-\cos x)=0$, перейдем в каждой из скобок к произведению:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)=0.$$

Выражение, стоящее в скобках, также преобразуем в произведение, применяя формулы приведения:

$$\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{3x}{2}=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда уравнение имеет вид $4\sin\frac{5x}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

Получили совокупность из трех уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{5x}{2}=0\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\frac{2\pi n}{5}\\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k\\ x_3=\frac{\pi}{2}+2\pi m, n,k,m\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=\frac{2\pi n}{5}; x_2=\frac{\pi}{4}+\pi k; x_3=\frac{\pi}{2}+2\pi m, n,k,m\in Z.$

14.1.7. Метод понижения степени

Этот метод применяется тогда, когда членами уравнения (обычно это — синусы и косинусы) являются либо квадраты, либо четвертые степени тригонометрических функций, и заключается в последовательном понижении степени (см. формулы (12.20) понижения степени в п. 12.1.9 главы 12) с дальнейшим решением получившегося уравнения одним из вышеизложенных методов.

Пример 6. Решить уравнение $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

Решение. Применяя формулы понижения степени, получим уравнение

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left[\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}.$$

Заменим $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ на $(-\sin 2x)$, раскроем скобки и умножим обе части на 4:

$$1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\sin 2x+\sin^2 2x=1 \Leftrightarrow \sin 2x-\cos 2x=-1.$$

Последнее уравнение преобразуем к разности косинусов:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-\cos 2x=-1 \Leftrightarrow -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=-1 \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решая последнее уравнение, получим

$$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

14.1.8. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным

Припишем каждому синусу или косинусу одного и того же аргумента показатель степени, равный единице, и будем считать показатель степени некоторого их произведения как сумму показателей степеней функций, входящих в это произведение; показатель степени отношения — как разность показателей степеней числителя и знаменателя. Например, показатель степени выражения $3\sin x\cos x$ равен 2, а показатель степени выражения $3\operatorname{tg}2x-\frac{3\sin 2x}{\cos 2x}$ равен 0.

Будем называть уравнение однородным n-й степени относительно тригонометрических функций какого-либо одного аргумента, если и левая, и правая его части являются суммой членов, каждый из которых имеет показатель n — степени относительно функций того же аргумента.

Так, например, уравнение $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$ — однородное уравнение второй степени.

Метод решения однородных уравнений заключается в том, что его члены делят на n-ю степень либо косинуса, либо синуса с обязательной проверкой на то, что при этой операции не произошла потеря решений.

Пример 7. Решить уравнение $2\sin x\cos x+\cos^2 x=0.$

Решение. ОДЗ: $x\in R$. Данное уравнение — однородное второй степени.

1. Перед тем, как разделить обе его части на $\cos^2 x$, проверим, не произойдет ли при этом потеря корней. Правила равносильных преобразований не разрешают делить уравнение на выражение, обращающееся в нуль (см. главу 2).

Если $\cos^2 x=0$, то левая часть уравнения обращается тоже в ноль и равна правой части. Другими словами, решение уравнения $\cos^2 x=0$ является решением исходного уравнения и если уравнение просто разделить на $\cos^2 x$, то произойдет потеря решения. Поэтому, прежде чем произвести деление, получим одно решение данного уравнения, $\cos x=0\Leftrightarrow x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, которое необходимо записать в ответ.

2. Теперь считаем, что $\cos^2 x\neq 0$ и разделим на него обе части уравнения, получим $2\operatorname{tg}x+1=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_2=-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\pi k, k\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $x_2=-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\pi k, k\in Z.$

В случае, когда показатель степени некоторых членов «отстает» от показателей степени остальных на четное число единиц, их можно «подправить» умножением этих членов на тригонометрическую единицу, взятую с соответствующим показателем степени $\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^n=1, n\in Z$, и таким образом свести заданное уравнение к однородному.

Пример 8. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

Решение. ОДЗ уравнения: $x\in R$. Данное уравнение можно привести к однородному, умножив его правую часть на $\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1$.

После упрощений получим однородное уравнение:

$$3\sin^4 x-10\sin^2 x\cos^2 x+3\cos^4 x=0.$$

1. Если $\cos x=0$, то из уравнения следует, что и $\sin x=0$. Этого быть не может, так как противоречит основному тождеству $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Таким образом, решение уравнения $\cos^4 x=0$ не является решением исходного уравнения.

2. Разделим обе части уравнения на $\cos^4 x$, получим биквадратное уравнение $3tg^4x-10tg^2x+3=0$. Решения этого уравнения имеют вид $tgx=\pm\sqrt{3}$; $tgx=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Откуда получим решение примера $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

Ответ: $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

14.1.9. Введение вспомогательного угла

При решении тригонометрических уравнений иногда приходится решать уравнения вида

$$a\sin x+b\cos x=c,$$

где a и b не обращаются в ноль одновременно.

Рассмотрим один из возможных способов его решения, называемый методом введения дополнительного угла.

Заметим, что если коэффициент $a<0$, то умножением обеих частей уравнения на (-1) можно получить равносильное уравнение с коэффициентом $a>0$. Далее будем считать, что коэффициент a при синусе всегда неотрицателен: $a\geq 0$.

Умножим обе части уравнения на дробь $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда исходное уравнение примет вид $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Так как $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$; $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1$, а также $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то можно принять, что $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$ и $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, где φ — некоторый вспомогательный угол, расположенный в первой или в четвертой четверти, так как $\cos\varphi \ge 0\,(a\ge 0)$.

Левая часть уравнения может быть записана в виде

$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Данное уравнение имеет решение, если $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Rightarrow c^2\le a^2+b^2$.

$$x+\varphi=(-1)^n\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi n, n\in Z \text{ или}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=(-1)^n\arcsin\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi+\pi n, n\in Z, \text{ где} \\ \varphi=\begin{cases}\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{при } b\ge 0 \\ -\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{при } b<0,\end{cases} \\ c^2\le a^2+b^2 \end{array}}$$

Если $b\ge 0$, то угол φ расположен в первой четверти (синус и косинус неотрицательны), если $b<0$, то угол φ расположен в четвертой четверти (синус отрицателен, а косинус положителен).

Пример 9. Решить уравнение $\sin x+2\cos x=6$.

Решение. Так как в данном случае $a=1, b=2, c=6,$ то не выполняется условие $c^2\le a^2+b^2$.

Ответ: уравнение не имеет решений.

Пример 10. Решить уравнение $2\sin x+3\cos x=1$.

Решение. Это уравнение имеет решение, так как

$$c^2\le a^2+b^2 \Leftrightarrow 1<2^2+3^2=13.$$

Разделим все члены уравнения на $\sqrt{13}$, получим следующее уравнение $\dfrac{2}{\sqrt{13}}\sin x+\dfrac{3}{\sqrt{13}}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Обозначив $\cos\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{13}}; \sin\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, запишем результат $\sin(x+\varphi)=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Решение последнего уравнения имеет вид $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{13}}-\varphi+\pi n, n\in Z.$ При этом вспомогательный угол φ лежит в первой четверти и равен $\varphi=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{13}}-\arccos\dfrac{2}{\sqrt{13}}+\pi n, n\in Z.$

14.1.10. Метод замены неизвестного

Рассмотрим три наиболее известных приема введения нового неизвестного.

1 Универсальная подстановка

Определение 14.1

Функцию $R\big(f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)\big)$ *будем называть рациональной функцией относительно функций* $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$*, если при записи ее через эти функции используются лишь знаки сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с целым показателем и деления.*

Говоря короче, функция R является отношением многочленов относительно функций $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$.

Например, $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\cos x + \sin x}$ — рациональная функция указанных аргументов, а функция $R(\sin x, \cos x) = \sqrt{\sin x + \cos x}$ рациональной не является, так как при ее записи использован неразрешенный в определении 14.1 знак радикала.

При решении тригонометрических уравнений часто применяется так называемая универсальная подстановка.

Универсальной является подстановка, позволяющая выразить синус, косинус, тангенс и котангенс некоторого угла рационально через тангенс половины этого угла. Таким образом, уравнение

$$R(\sin x, \cos x, \mathrm{tg}x, \mathrm{ctg}x, \mathrm{tg}\frac{x}{2}, \mathrm{ctg}\frac{x}{2}) = 0$$

преобразуется в рациональное относительно переменной $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$, решив которое и возвращаясь затем к первоначальной переменной, находят решение исходного уравнения. Упомянутая замена производится по известным формулам:

$\sin x = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z$
$\mathrm{tg}x = \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

При такой замене надо иметь в виду важное обстоятельство.

Подстановка $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ предполагает, что заменяемый тангенс половинного угла не определен при $\cos\dfrac{x}{2} = 0$ или при $x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$ Если же эти значения являются корнями решаемого уравнения, то после замены они будут безвозвратно потеряны. Следовательно, при решении уравнения данным методом в качестве первого шага следует выполнить проверку на принадлежность решению задачи значений из серии $x=\pi+2\pi n, n\in Z$ и только после этого искать остальные корни, применяя подстановку.

Пример 11. Решить уравнение $1+\cos 2x=\mathrm{ctg}x$.

Решение. ОДЗ уравнения: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pi n, n\in Z.$

Так как в данном случае половина аргумента косинуса есть x, то подстановка будет выглядеть так: $t=\mathrm{tg}x.$

1. Проверим значения из серии $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ ($\mathrm{tg}x$ не определен). $1+\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=1+\cos(\pi+2\pi n)=0=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=0.$

Таким образом, значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ являются решением исходного уравнения.

2. Применяя рациональную подстановку $t=\mathrm{tg}x$, получим $1+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1}{t}$. После элементарных преобразований получим квадратное уравнение $\begin{cases} t^2-2t+1=0 \\ t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1.$

Далее решаем простейшее уравнение $\mathrm{tg}x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$

Оба полученных решения принадлежат ОДЗ.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$

2. Замена $\cos 2x=t$.

Эта замена целесообразна, если левая часть тригонометрического уравнения является рациональной функцией $\cos 2x$, а также синусов и косинусов с четными показателями степени. В этом случае для замены применяются формулы понижения степени:

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$
$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

Пример 12. Решить уравнение $\cos 2x+4\sin^4 x=8\cos^6 x.$

Решение. ОДЗ уравнения: $x\in R.$ Сделаем замену $t=\cos 2x$.

$$t+4\left(\frac{1-t}{2}\right)^2=8\left(\frac{1+t}{2}\right)^3 \Leftrightarrow t+1-2t+t^2=1+3t^2+3t+t^3 \Leftrightarrow t^3+2t^2+4t=0.$$

Легко убедиться в том, что уравнение имеет единственный корень $t=0$. Тогда получим $\cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

3. Замена с помощью подстановки $\sin x \pm \cos x = t.$

Если тригонометрическое уравнение является рациональной функцией относительно аргументов $(\sin x+\cos x)$ или $(\sin x-\cos x)$, $\sin x\cdot\cos x$, уравнения сводятся к рациональным подстановкой $\sin x+\cos x=t$ или $\sin x-\cos x=t$ в зависимости от того, сумма или разность синуса и косинуса присутствуют в данном уравнении.

Идея подстановки заключается в том, что произведение $\sin x\cdot\cos x$ может быть легко выражено через сумму (или разность) синуса и косинуса.

Действительно, если применяется подстановка $\sin x+\cos x=t$, то возводя это равенство в квадрат, получим

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=t^2 \Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x=t^2.$$

Откуда следует, что $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}.$

Аналогично, при подстановке $\sin x-\cos x=t$ получаем $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}.$

Таким образом, получим $R((\sin x+\cos x),\sin x\cos x)=R\left(t,\frac{t^2-1}{2}\right)$ и $R((\sin x-\cos x),\sin x\cos x)=R\left(t,\frac{1-t^2}{2}\right).$

Здесь необходимо сделать одно замечание.

Так как $\sin x+\cos x=t=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, то значения $|t|$ не могут превосходить $\sqrt{2}$. Аналогичное неравенство справедливо и при подстановке $\sin x-\cos x=t$.

Следовательно, некоторые корни рационального уравнения (относительно t) могут быть посторонними для исходного тригонометрического: необходимо оставлять лишь те из них, для которых выполняется соотношение $|t|\le\sqrt{2}.$

Пример 13. Решить уравнение $\cos 2x=\cos 3x-\sin 3x.$

Решение. ОДЗ уравнения: $x\in R.$ Выразим косинус и синус тройного угла через косинус и синус одинарного.

$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x-2\sin^2 x\cos x=$
$=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x.$

$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=2\sin x\cos^2 x+(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin x=$
$=-\sin^3 x+3\sin x\cos^2 x.$

Тогда правая часть уравнения имеет вид

$$\cos 3x-\sin 3x=\cos^3 x+\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x.$$

Раскладывая $\cos^3 x+\sin^3 x$ по формуле суммы кубов и вынося за скобки общие множители, получим

$$\cos^3 x+\sin^3 x-3\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x=(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x)-$$
$$-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=(\cos x+\sin x)(1-4\sin x\cos x).$$

Левая часть уравнения имеет вид $\cos 2x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$.

Исходное уравнение может быть записано следующим образом:

$$(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)-(\cos x+\sin x)(1-4\sin x\cos x)=0.$$

Вынося за скобки сумму $(\cos x+\sin x)$, получим

$$(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x-1+4\sin x\cos x)=0.$$

Данное уравнение распадается на совокупность из двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \cos x-\sin x+4\sin x\cos x-1=0.\end{array}\right.$$

Первое уравнение — однородное и решается делением на $\cos x$ ($\cos x=0$ — не является решением данного уравнения).

Тогда $\mathrm{tg}x=-1\Leftrightarrow x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$

Во втором уравнении сделаем замену $t=\sin x-\cos x$. Тогда получим $\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$ и $-t+2(1-t^2)-1=0\Leftrightarrow 2t^2+t-1=0$.

Корнями данного уравнения будут числа $t_1=-1, t_1=\dfrac{1}{2}$. Оба корня по модулю не превосходят $\sqrt{2}$.

Имеем совокупность $\left[\begin{array}{l}\sin x-\mathrm{cox}=-1\\ \sin x-\cos x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Решаем первое уравнение:

$$\sin x-\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

При n четном ($n=2k, k\in Z$) получим $x_2=2\pi k, k\in Z.$ При нечетном значении n ($n=2m-1, m\in Z$) получим $x_3=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z.$

Решаем второе уравнение:

$$\sin x-\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow x_4=\frac{\pi}{4}+(-1)^p\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\pi p, p\in Z.$$

Ответ: $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z,$ $x_2=2\pi k, k\in Z,$ $x_3=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z,$

$$x_4=\frac{\pi}{4}+(-1)^p\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\pi p, p\in Z.$$

14.1.11. Решение уравнений с учетом ограниченности функций sin x и cos x

Решение этих уравнений основывается на том простом факте, что синус и косинус — функции, модули которых ограничены сверху единицей. Следовательно, их произведение может быть равно, например, единице только в случае, когда каждая из этих функций равна либо единице, либо минус единице. Сумма равна двум в случае, когда каждая из них равна единице.

Так, уравнение $\sin x + \sin 5x = 2$ равносильно системе двух уравнений с одним неизвестным: $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = 1. \end{cases}$

Уравнение $\sin x \cdot \sin 5x = 1$ равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 14. Решить уравнение $\sin 7x + \cos 2x = -2$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 7x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2\pi n}{7} \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in Z. \end{cases}$$

Для решения системы воспользуемся результатами п. 14.1.2.

Найдем значения n и k, при которых $x_1 = x_2$.

Приравнивая $x_1 = x_2$, получим $-\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2\pi n}{7} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k.$

После упрощений получим уравнение

$$-1 + 4n = 7 + 14k \Leftrightarrow 2n - 7k = 4.$$

Подбором получаем, что $n_0 = 2, k_0 = 0$. Тогда все решения уравнения определяются по формуле (14.1.2):

$$a = 2, b = -7 \text{ и } n = 2 + 7t \text{ и } k = 2t, t \in Z.$$

Подставляя в решение x_1 значения $n = 2 + 7t$ или в решение x_2 значения $k = 2t, t \in Z$, получим решение системы: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in Z.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi t, t \in Z.$

Пример 15. Решить уравнение $3\sin^5 x + 4\cos^9 x = 7$.

Решение. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1. \end{cases}$

Система решений не имеет, так как противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Ответ: уравнение не имеет решений.

14.1.12. Комбинированные уравнения

К таким уравнениям мы отнесем уравнения, в которых наряду с тригонометрическими функциями встречаются и другие, например степенная, логарифмическая, показательная и др.

Достаточно общим методом решения таких уравнений является подбор корней, который подразумевает обязательное последующее обоснование отсутствия других решений.

Пример 16. Решить уравнение $2\cos\pi x = 9x^2$.

Решение.

1. Левая и правая части уравнения — четные функции. Следовательно, если имеется корень x_0, то имеется также корень и $(-x_0)$. Подбором находим, что левая и правая части равны при $x = \frac{1}{3}$. Тогда $x = -\frac{1}{3}$ — также корень данного уравнения.

2. Докажем, что других корней нет. Так как на отрезке $[0;1]$ функция левой части убывает, а правой возрастает, то корень, если он конечно есть, единственный. На интервале $(1;\infty)$ корней не может быть вовсе, так как значения левой части не превосходят 2, а правая — больше 9 (рис. 14.5).

Ответ: $x = \pm\frac{1}{3}$.

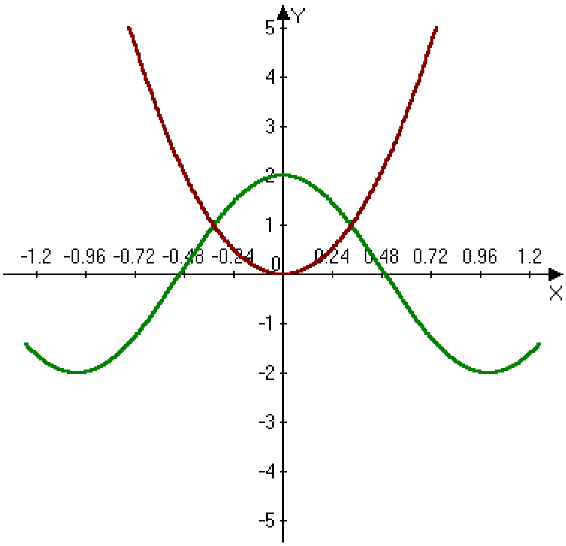


Рис. 14.5

К решению примера 16

Пример 17. Решить уравнение $\cos\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{\pi x}{2}=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Решение. Левая часть уравнения не превосходит по модулю значения $\sqrt{2}$, так как $\cos\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{\pi x}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$.

Рассмотрим правую часть уравнения: $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пусть $a=\sqrt{x}$, $b=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, при этом $a,b\ge 0$. Очевидно, что $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a+b-2\sqrt{ab}\ge 0 \Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (неравенство Коши).

Равенство же достигается только при $a=b$. Итак, правая часть уравнения $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$. Получили, что левая часть уравнения не превосходит $\sqrt{2}$, а правая не менее, чем $\sqrt{2}$. Следовательно, равенство левой и правой части уравнения возможно лишь тогда, когда каждая из них равна $\sqrt{2}$ и при этом $a=b$. Тогда получим уравнение $\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Подстановка этого значения в левую часть дает: $\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$

При $x=\frac{1}{2}$ левая и правая части уравнения равны $\sqrt{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

14.2. Системы тригонометрических уравнений

Системы тригонометрических уравнений путем преобразований можно свести к системам алгебраических уравнений. Рассмотрим некоторые типы систем.

1. $\begin{cases}\sin x\sin y=b\\ \cos x\cos y=a\end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения системы, получим

$$\begin{cases}\cos(x-y)=a+b\\ \cos(x+y)=a-b.\end{cases}$$

Решение системы существует, если $\begin{cases}|a+b|\le 1\\ |a-b|\le 1.\end{cases}$

Если условия выполнены, то $\begin{cases}x-y=\pm\arccos(a+b)+2\pi n, n\in Z\\ x+y=\pm\arccos(a-b)+2\pi k, k\in Z.\end{cases}$

Далее, полагая $\alpha = \arccos(a+b); \beta = \arccos(a-b)$, получим алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = \pm\alpha + 2\pi n, n \in Z \\ x + y = \pm\beta + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \pi(n+k) \\ y = \dfrac{1}{2}(\beta-\alpha) + \pi(k-n), \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \pi(n+k) \\ y = -\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha) + \pi(k-n), \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\alpha-\beta) + \pi(n+k) \\ y = -\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + \pi(k-n), \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(-\alpha+\beta) + \pi(n+k) \\ y = \dfrac{1}{2}(\beta+\alpha) + \pi(k-n), n, k, \in Z. \end{cases} \end{array} \right.$$

Аналогично решаются системы вида $\begin{cases} \sin x \cos y = a \\ \cos x \sin y = b. \end{cases}$

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cos y = 1 \\ \cos x \sin y = 0. \end{cases}$

Решение. Складывая и вычитая уравнения системы, получим

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x - y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in Z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi(n+k) \\ y = \pi(n-k), n, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi(n+k) \\ y = \pi(n-k), n, k \in Z. \end{cases}$

2. Системы вида

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b \end{cases}$$

или ей подобные, в которых неизвестные входят лишь под знаком одних и тех же функций, сводятся к алгебраической системе уравнений с двумя неизвестными заменой $u = \sin x, v = \sin y,\ |u| \le 1; |v| \le 1$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + 2\sin x \cos y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Решение. Обозначив $u = \sin x, v = \cos y,\ \ |u| \le 1; |v| \le 1$, получим систему

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 + 2uv = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Данная система решается методом подстановки.

$$\begin{cases} v = 1 - u \\ u^2 + 2u(1-u) = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ u^2 - 2u + \dfrac{3}{4} = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы, удовлетворяющим условиям

$|u| \le 1; |v| \le 1$ будут числа $\begin{cases} u = \dfrac{1}{2} \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\left(x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n; y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in Z \right).$

3. Системы вида

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = \alpha \end{cases}$$

или ей подобные решаются подстановкой.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Делая подстановку из второго уравнения в первое, получим

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi n \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}, n \in Z. \end{cases}$$

Решая последнюю систему последовательно, взяв первое уравнение с плюсом и затем с минусом, запишем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ y=-\dfrac{\pi}{6}-2\pi n, n\in Z,\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\\ y=\dfrac{\pi}{2}-2\pi k, n,k\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ:

$$\left\{\left(x=\frac{\pi}{2}+2\pi n; y=-\frac{\pi}{6}-2\pi n, n\in Z\right);\left(x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k; y=\frac{\pi}{2}-2\pi k, k\in Z\right)\right\}.$$

4. Системы вида $\begin{cases}a_1\sin x+b_1\sin y=c_1\\ a_2\cos x+b_2\cos y=c_2\end{cases}$ решаются методом исключения одной из переменных с применением основного тригонометрического тождества.

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sin y=5\sin x\\ 3\cos x+\cos y=2.\end{cases}$

Решение. Запишем систему в виде $\begin{cases}\sin y=5\sin x\\ \cos y=2-3\cos x.\end{cases}$

Исключим переменную y путем сложения уравнений, после их возведения в квадрат. Заметим, что возведение уравнений в квадрат не является равносильной операцией и, следовательно, необходима проверка решений системы.

$$\begin{cases}\sin y=5\sin x\\ \cos y=2-3\cos x.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2 y=25\sin^2 x\\ \cos^2 y=4-12\cos x+9\cos^2 x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=2-3\cos x\\ 1=4-12\cos x+9\cos^2 x+25\sin^2 x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=2-3\cos x\\ 16\cos^2 x+12\cos x-28=0.\end{cases}$$

Последняя система распадается на совокупность из двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos y=2-3\cos x\\ \cos x=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos y=2-3\cos x\\ \cos x=-\dfrac{7}{4}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решение имеет только первая система $\begin{cases}\cos x=1\\ \cos y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\pi n\\ y=\pi+2\pi k, n,k\in Z.\end{cases}$

Проверка. Подставляя полученные решения в уравнения системы, получим верные равенства.

$$\begin{cases} \sin(\pi+2\pi k)=5\sin 2\pi n \\ 3-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 2=2. \end{cases}$$

Ответ: $x=2\pi n,\ \ y=\pi(2k+1), n, k\in Z.$

14.3. Простейшие тригонометрические неравенства

К таким неравенствам относятся неравенства вида

$$\sin(g(x))>a;\ \cos(g(x))>a;\ tg(g(x))>a,\ ctg(g(x))>a,$$

где a — известная постоянная, $g(x)$ — алгебраическое выражение (вместо знака $(>)$ может быть любой из знаков $(<;\le;\ge)$).

Сделав замену переменной $g(x)=t,$ получим неравенства

$\sin t>a;\ \cos t>a;\ tgt>a,\ ctgt>a,$ решив которые, с помощью соотношения $g(x)=t$, сможем найти решения заданного простейшего неравенства.

Неравенства $\sin t>a;\ \cos t>a;\ tgt>a,\ ctgt>a$ решается либо с помощью тригонометрического круга, либо графика соответствующей тригонометрической функции.

Пример 1. Решить неравенство $\sin x>\frac{1}{2}.$

Решение.

1. На тригонометрическом круге отмечаем концы радиусов-векторов, ординаты которых равны $\frac{1}{2}$ (рис.14.6).

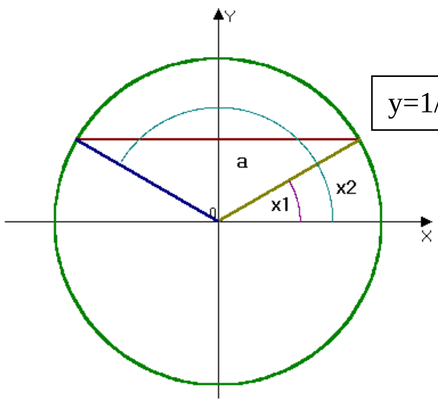


Рис. 14.6

К решению неравенства примера 1

Для этого решаем уравнение $\sin x=\frac{1}{2}$, но выбираем только два решения, принадлежащих промежутку $[0;2\pi]$ — т. е. периоду синуса.

Такими значениями будут $x_1=\frac{\pi}{6}$ и $x_2=\frac{5\pi}{6}$.

Данное в условии задачи неравенство выполняется для тех углов x, для каждого из которых конец подвижного радиуса-вектора, образующего с положительным направлением оси OX угол x, находится на верхней дуге, заключенной между $x_1 = \frac{\pi}{6}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Тогда $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

Принимая во внимание, что функция синус имеет период 2π, получаем множество всех решений данного неравенства: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ или $x \in \bigcup\limits_{n \in Z} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right)$.

Пример 2. Решить неравенство $tg\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) > 2$.

Решение. Сделав замену $t = 2x - \frac{\pi}{5}$, получаем неравенство $tgt > 2$.

Решаем это неравенство на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ с помощью графика функции $y = tgx$ (рис. 14.7).

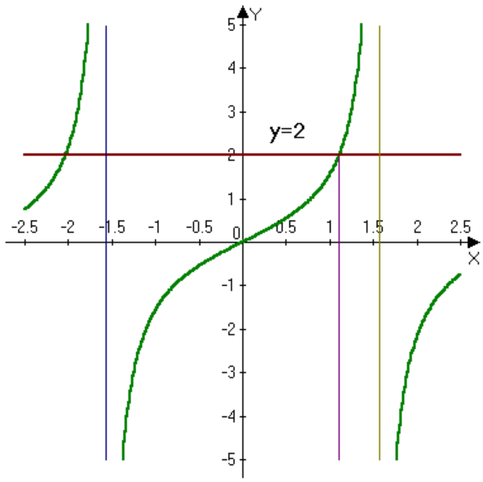


Рис. 14.7

К решению неравенства примера 2

Проведя прямую $y = 2$, видим, что на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ неравенству $tgt > 2$ удовлетворяют числа $t \in \left(\text{arctg}2; \frac{\pi}{2}\right)$, а значит множеством всех решений этого неравенства (с учетом того, что период тангенса равен π) будет множество $t \in \bigcup\limits_{n \in Z} \left(\pi n + \text{arctg}2; \pi n + \frac{\pi}{2}\right)$.

Возвращаясь с помощью формулы $t = 2x - \frac{\pi}{5}$ к переменной x, получаем множество всех решений исходного неравенства:

$$\pi n + \operatorname{arctg}2 < 2x - \frac{\pi}{5} < \pi n + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi n}{2} + \frac{\operatorname{arctg}2}{2} + \frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi n}{2} + \frac{7\pi}{20}\ ,\ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2} + \frac{\operatorname{arctg}2}{2} + \frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi n}{2} + \frac{7\pi}{20}; n \in Z$ или

$$x \in \bigcup_{n \in Z} \left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\operatorname{arctg}2}{2} + \frac{\pi}{10}; \frac{\pi n}{2} + \frac{7\pi}{20} \right).$$

Пример 3. Решить неравенство $\sin x + \cos x \le 1$.

Решение. Представим сумму $\sin x + \cos x$ в виде произведения $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Тогда необходимо решить неравенство $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$. После деления на $\sqrt{2}$, получим неравенство $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решая данное неравенство, запишем, что

$$2\pi n + \frac{\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le 2\pi n + \frac{7\pi}{4}, n \in Z \Leftrightarrow 2\pi n + \frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi n + 2\pi, n \in Z.$$

Ответ: $2\pi n + \frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi n + 2\pi, n \in Z$ или $x \in \bigcup_{n \in Z} \left[2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + 2\pi \right]$.

Пример 4. Решить неравенство $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 > 0$.

Решение. Обозначим $t = \cos x$, $|t| \le 1$. Тогда получим систему из двух неравенств:

$$\begin{cases} 2t^2 - 7t + 3 > 0 \\ -1 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)\left(t - \frac{1}{2}\right) > 0 \\ -1 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t > 3 \\ t < \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ -1 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left[-1; \frac{1}{2} \right).$$

После обратной замены получаем систему из простейших неравенств

$$\begin{cases} \cos x < \frac{1}{2} \\ \cos x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ x \in R \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ или $x \in \bigcup_{n \in Z} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \right)$.

ГЛАВА 15
ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

15.1. Определение производной. Уравнение касательной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и в некоторой ее окрестности. Величина $\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращением функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, вызванным приращением Δx ее аргумента.

Определение 15.1

Если существует предел

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A,}$$

то его называют производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначают* $A = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x = x_0}$. *При этом функция* $f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* $x = x_0$.

Из данного определения нетрудно установить геометрический смысл производной, понимание которого является важным для решения большого числа задач.

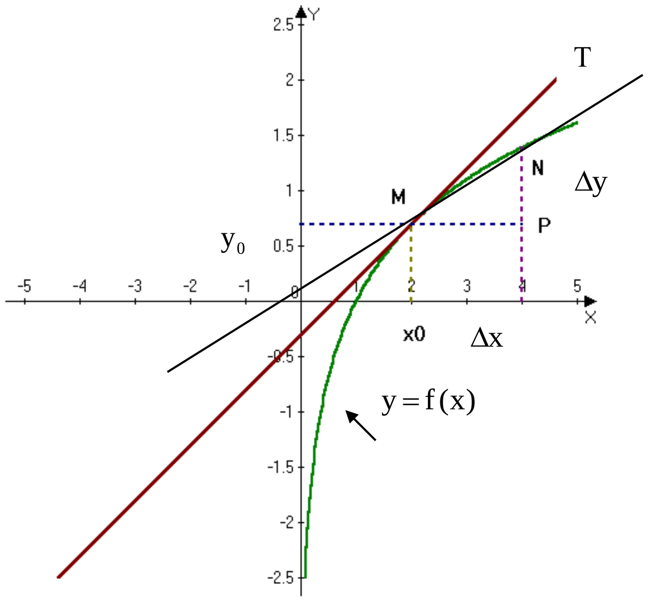


Рис. 15.1

К определению производной функции

На рисунке 15.1 показана функция $y=f(x)$ и две точки $M(x_0;y_0)$, $N(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$. Через точки MN проведена секущая MN.

Из прямоугольного треугольника MNP (рис. 15.1) следует, что тангенс угла φ наклона секущей MN к оси OX равен $tg\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x\to 0$ точка N приближается к точке M. При этом угол наклона секущей изменяется.

Прямая MT (рис. 15.1) — предельное положение секущей MN, соединяющей точку M с бесконечно приближающейся к ней другой точкой N рассматриваемой кривой, называется касательной к данной кривой в точке M.

Следовательно, угловой коэффициент касательной MT с точкой касания $M(x_0,f(x_0))$ равен значению производной $f'(x_0)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0} tg\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=tg\alpha,$$

где α — угол наклона касательной к оси OX.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0,f(x_0))$ имеет вид

$$y_k=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

15.2. Вычисление производной

Для практического решения задач, связанных с производной, необходимо знать производные основных элементарных функций (табл. 15.1) и правила вычисления производной.

Таблица 15.1

Таблица производных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
$C=const$	0	$\cos x$	$-\sin x$
x	1	e^x	e^x
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	a^x	$a^x\ln a$
$x^\alpha,\alpha\in R$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x.

Тогда справедливы следующие свойства.

1. Вынесение постоянного множителя за знак производной.

$$(C\cdot f(x))'=Cf'(x),$$

где C — постоянная величина, т. е. постоянный множитель можно выносить за знак производной, например $(3x^3)'=3\cdot(x^3)'=3\cdot 3x^2=9x^2$.

2. Производная суммы (разности).

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x),$$

$$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x).$$

3. Производная произведения.

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

4. Производная частного.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}, \quad g(x)\neq 0.$$

5. Производная сложной функции.

Пусть функция $u=g(x)$ *имеет производную в точке x, а функция* $y=f(u)$ *имеет производную в точке* $u=g(x)$. *Тогда сложная функция* $F(x)=y=f\left(g(x)\right)$ *имеет производную в точке x, равную* $F'(x)=y'=f'(u)\cdot g'(x)$, *где* $u=g(x)$.

Пример 1. Найти производную функции $y=\left(x^2+x+1\right)^{100}$.

Решение. Полагая, что $u=g(x)=x^2+x+1$, $y=f(u)=u^{100}$, имеем $f'(u)=100u^{99}$, $g'(x)=\left(x^2+x+1\right)'=2x+1$, и по правилу вычисления производной сложной функции $F'(x)=y'=100u^{99}(2x+1)=100\left(x^2+x+1)\right)^{99}(2x+1)$.

Ответ: $y'=100\left(x^2+x+1)\right)^{99}(2x+1)$.

Пример 2. Найти производную функции $y=\ln\sin^2\left(x^2+1\right)$.

Решение Определим вид сложной функции. Полагая, что $y=f\left(u_1\right)=\ln u_1, u_1=u_2^2$, $u_2=\sin u_3$, $u_3=x^2+1$, имеем $f'(u_1)=\frac{1}{u_1}$, $u_1'=2u_2$, $u_2'=\cos u_3$, $u_3'=2x$, и по правилу вычисления производной сложной функции $F'(x)=y'=\frac{1}{u_1}\cdot 2u_2\cdot\cos u_3\cdot 2x=\frac{1}{\sin^2\left(x^2+1\right)}\cdot 2\sin\left(x^2+1\right)\cdot\cos\left(x^2+1\right)\cdot 2x=4x\mathrm{ctg}\left(x^2+1\right)$.

Ответ: $4x\mathrm{ctg}\left(x^2+1\right)$.

15.3. Монотонность и экстремумы функций

Определение 15.2

Функция $y=f(x)$ *называется строго возрастающей* (*убывающей*) *на отрезке* $[a;b]$, *если для любых* x_1, x_2 *из этого отрезка, связанных неравенством* $x_1<x_2$, *выполняется неравенство* $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$.

Функции, строго возрастающие (*убывающие*) *на отрезке* $[a;b]$, *называются монотонными на этом отрезке.*

Теорема 15.1

Если функция $y=f(x)$ *определена и имеет производную на интервале* $(a;b)$ *и* $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ *для любого* x *из рассматриваемого интервала, то функция* $y=f(x)$ *строго возрастает* (*убывает*) *на указанном интервале.*

Если функция $y = f(x)$ *монотонна на интервале* $(a;b)$ *и непрерывна в точках* a *и* b*, то она монотонна на отрезке* $[a;b]$.

Замечание. Отметим, что сформулированное утверждение остается в силе и в том случае, когда $f'(x)$ положительна или отрицательна во всех точках интервала $(a;b)$ кроме конечного числа точек, в которых $f'(x)$ равна нулю.

Например, функция $y = x^3$ имеет производную, равную $y' = 3x^2$, которая положительна и обращается в ноль только в одной точке $x = 0$. Однако при всех значениях x на интервале $(-\infty;\infty)$ функция возрастает.

Действительно, $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta x\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right) > 0$ при всех значениях x и при $\Delta x > 0$, так как квадратичная функция, стоящая в круглых скобках, всегда положительна (дискриминант отрицателен и ветви параболы направлены вверх).

Пример 3. Исследовать на возрастание и убывание функцию $y = xe^{-3x}$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = \left(xe^{-3x}\right)' = x'e^{-3x} + x\left(e^{-3x}\right)' = e^{-3x} + xe^{-3x}(-3) = e^{-3x}(1 - 3x).$$

Производная существует всюду и обращается в ноль в точке $x = \frac{1}{3}$. Эта точка делит числовую ось на два интервала $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$. Так как показательная функция e^{-3x} положительна при любом x, то знак производной определяется вторым сомножителем. Следовательно, на интервале $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ производная положительна и данная функция на нем возрастает $y\uparrow$. На интервале $\left(\frac{1}{3};\infty\right)$ производная отрицательна и функция убывает $y\downarrow$. В самой же точке $x = \frac{1}{3}$ функция непрерывна, и, следовательно, данная функция монотонно возрастает на промежутке $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$ и монотонно убывает на промежутке $\left[\frac{1}{3};\infty\right)$.

Ответ: $y\uparrow$ при $x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$; $y\downarrow$ при $x \in \left[\frac{1}{3};\infty\right)$.

Пример 4. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

Решение. Данная функция определена для всех действительных значений x, кроме $x = 1$. Поэтому производная этой функции для всех $x \neq 1$ находится по правилу вычисления производной частного:

$$y' = \frac{(2x-1)'(x-1)^2 - ((x-1)^2)'(2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{2(x-1) - 2(2x-1)}{(x-1)^3} == \frac{-2x}{(x-1)^3}.$$

Исследуя знак производной, решая неравенство $\frac{-2x}{(x-1)^3} > 0$ методом интервалов, получим $y' > 0$ при $x \in (0;1)$ и $y' < 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (1;\infty)$. В точке $x = 0$ функция непрерывна, следовательно, функция возрастает на промежутке $x \in [0;1)$ и убывает на промежутках $x \in (-\infty;0]$ и $x \in (1;\infty)$.

Ответ: $y \uparrow$ при $x \in [0;1)$; $y \downarrow$ при $x \in (-\infty;0]$ и при $x \in (1;\infty)$.

С исследованием функции на возрастание и убывание тесно связано нахождение экстремума функции.

Определение 15.3

Пусть функция определена в точке x_0 *и в некоторой ее окрестности. Говорят, что функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* x_0 *максимум* (*минимум*), *если существует такой интервал* $(x_0 - d; x_0 + d)$, *что для всех* $x \neq x_0$, *принадлежащих этому интервалу, выполняется неравенство* $f(x) < f(x_0)$ (*соответственно* $f(x) > f(x_0)$). *Точки минимума и точки максимума называются точками экстремума, а значения функции в этих точках называют экстремальными значениями.*

Теорема 15.2 (Необходимое условие экстремума функции).

Пусть функция $y = f(x)$ *определена в интервале* $(a;b)$ *и пусть некоторая точка* x_0 *этого интервала является точкой экстремума данной функции. Тогда, если функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *производную, то* $f'(x_0) = 0$.

Точка x_0 при этом называется критической точкой.

Теорема 15.3 (Достаточное условие экстремума функции).

Пусть функция $y = f(x)$ *определена в интервале* $(a;b)$ *и пусть точка* $x_0 \in (a;b)$ *является критической, причем в этой точке функция непрерывна. Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак, то такая критическая точка является точкой экстремума функции: точкой максимума, если знак меняется с* $<+>$ *на* $<->$, *и точкой минимума, если знак меняется с* $<->$ *на* $<+>$.

Если же при переходе через критическую точку знак производной не меняется, то в этой критической точке экстремума нет.

Замечание. Может оказаться, что непрерывная в точке $x_0 \in (a;b)$ функция не имеет производной в этой точке, но тем не менее имеет в ней экстремум. Например, функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ имеет минимум, хотя ее производная в этой точке не существует. Следовательно, во множество критических точек следует включать не только точки, в которых производная равна нулю, но и такие точки из интервала $(a;b)$, в которых производная не существует.

Пример 5. Найти экстремумы функции $y=\sqrt{2x^2-x+2}$.

Решение. Функция определена при всех значениях x, так как $2x^2-x+2>0$. Вычисляем производную заданной функции (используя правило вычисления производной сложной функции):

$$y'(x)=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}.$$

Отсюда находим критическую точку $x_0=\frac{1}{4}$ (в этой точке производная обращается в нуль). Других критических точек функция не имеет, так как знаменатель выражения в ноль не обращается, всегда положителен, и, следовательно, производная функции всегда существует. Легко определяем, что $y'(x)>0$ при $x>\frac{1}{4}$ и $y'(x)<0$ при $x<\frac{1}{4}$. Следовательно, при переходе через критическую точку $x_0=\frac{1}{4}$ производная функции меняет знак с $<->$ на $<+>$, и потому эта точка является точкой минимума данной функции, причем $y_{\min}\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{15}{8}}$.

Ответ: $y_{\min}\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{15}{8}}$.

15.4. Наибольшее и наименьшее значения функции

Многие задачи на исследование функций сводятся к отысканию наибольшего и наименьшего значений функций на различных промежутках.

Теорема 15.4

Функция, непрерывная на промежутке $[a;b]$, *принимает на этом промежутке свои наименьшее и наибольшее значения, причем достигаются они либо в критических точках этой функции, лежащих на заданном промежутке, либо на концах промежутка.*

Из этой теоремы следует:

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y=f(x)$ на промежутке $[a;b]$:

1) находят производную $y'(x)$ заданной функции и по ней ее критические точки, а затем отбирают те из них, которые принадлежат промежутку $[a;b]$;

2) находят значения функции в отобранных критических точках, а также значения функции на концах промежутка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$;

3) из полученных в п. 2) чисел выбирают наибольшее и наименьшее. Это и будут наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $[a;b]$. Обозначаются они, соответственно, через

$$\max_{[a;b]} f(x)=M,\ \min_{[a;b]} f(x)=m.$$

Пример 6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$ на отрезке $[1;6]$.

Решение. 1. Находим производную функции и по ней критические точки $y'=\left(\frac{x}{8}+\frac{2}{x}\right)'=\frac{1}{8}x'+2\left(x^{-1}\right)'=\frac{1}{8}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-16}{8x^2}$.

Критические точки определяются из уравнения $y'=0\Leftrightarrow x^2-16=0\Leftrightarrow x=\pm 4$.

Производная не существует в точке $x=0$, но эта точка не является критической точкой, так как в ней не существует и сама функция.

Единственной критической точкой функции, лежащей на промежутке $[1;6]$, является $x=4$.

2. Подсчитаем значения функции в этой точке и на концах промежутка: $f(4)=1;\ \ f(1)=\frac{17}{8};\ \ f(6)=\frac{13}{12}$.

3. Сравнивая эти значения между собой, получаем требуемый результат $\max\limits_{[1;6]} f(x)=\frac{17}{8},\ \min\limits_{[1;6]} f(x)=1$.

Ответ: $\max\limits_{[1;6]} f(x)=\frac{17}{8};\ \min\limits_{[1;6]} f(x)=1$.

15.5. Текстовые экстремальные задачи

Особый класс задач, связанный с экстремальными свойствами функции, составляют так называемые текстовые задачи (с алгебраическим, физическим или геометрическим содержанием) на нахождение наибольших или наименьших значений функций. Для решения такого рода задач следует сначала, используя условие задачи, составить функцию $y=f(x)$, найти ее область определения, а затем, в зависимости от условия задачи, отыскать наибольшее (или наименьшее) значение этой функции в найденной области.

Задача 1. Число 18 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Решение. Обозначим первое слагаемое через x, тогда второе слагаемое равно $18-x$. Очевидно, что $0<x<18$. Необходимо выбрать x так, чтобы функция $S(x)=x^2+(18-x)^2$ принимала наименьшее значение для указанных x. Находим производную $S'(x)=2x+2(18-x)(-1)=4(x-9)$ и критическую точку $x=9$ (в этой точке производная равна 0).

Производная при переходе через критическую точку меняет знак с $<->$ на $<+>$, и поэтому точка $x=9$ является точкой минимума функции $S(x)$. С учетом того, что функция $S(x)$ убывает на всем интервале $(0;9)$ и возрастает на всем интервале $(9;18)$, делаем вывод, что функция в точке $x=9$ принимает наименьшее на интервале $(0;18)$ значение.

Ответ: $18=9+9$.

Задача 2. Среди всех прямоугольных треугольников площади S найти тот, для которого площадь описанного круга будет наименьшей.

Решение. Обозначим катеты прямоугольного треугольника через x и y, радиус описанной около него окружности через R. Так как прямоугольный треугольник вписан в окружность, то он опирается на диаметр этой окружности, и, следовательно, его гипотенуза равна $2R$. Используя условие задачи и теорему Пифагора, получаем

$$\begin{cases} 4R^2 = x^2 + y^2 \\ S = \dfrac{1}{2}xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^2 = \dfrac{1}{4}\left(x^2 + \dfrac{4S^2}{x^2}\right) \\ y = \dfrac{2S}{x}. \end{cases}$$

Таким образом, площадь круга является такой функцией аргумента x: $S(x) = \pi R^2 = \dfrac{\pi}{4}\left(x^2 + \dfrac{4S^2}{x^2}\right) \Rightarrow S'(x) = \dfrac{\pi}{4}\left(2x - \dfrac{8S^2}{x^3}\right)$, $x \in (0;\infty)$.

Решая уравнение $S'(x) = 0$, получим единственную критическую точку $x = \sqrt{2S}$. Производная функции при переходе через точку $x = \sqrt{2S}$ изменяет знак с минуса на плюс (если x мало, то второе слагаемое в скобках преобладает и она отрицательна; если же x велико, то преобладает первое слагаемое в скобке и она положительна). Следовательно, в точке $x = \sqrt{2S}$ функция $S(x)$ принимает наименьшее значение для прямоугольного треугольника с катетами $x = \sqrt{2S}$, $y = \dfrac{2S}{x} = \sqrt{2S}$.

Ответ: Решение задачи дает прямоугольный равнобедренный треугольник, каждый катет которого равен $\sqrt{2S}$.

Задача 3. Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найти отношение радиуса вписанной в этот треугольник и описанной около этого треугольника окружностей. Выяснить, при каком α это отношение будет наибольшим?

Решение. Радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен $R = \dfrac{c}{2}$, где c — гипотенуза треугольника, а радиус вписанной в треугольник окружности равен $r = \dfrac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, $a; b$ — катеты треугольника (рис. 15.2).

Из треугольника следует, что $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $S = \dfrac{ab}{2}$ и, следовательно, $r = \dfrac{ab}{(a+b+c)} = \dfrac{c \cdot \sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)}$.

Отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $f(\alpha) = \dfrac{r}{R} = \dfrac{2r}{c} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)}$.

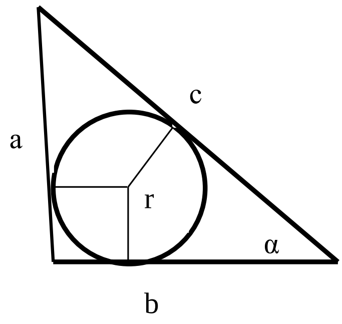


Рис. 15.2

К решению задачи 3

Требуется найти такой угол α, при котором $f(\alpha)$ принимает наибольшее значение. Очевидно, что $0 < f(\alpha) < 1$. Далее можно задачу решать двумя способами.

Первый — громоздкий, при котором необходимо вычислить производную по переменной α. Второй способ — более простой в реализации, в котором можно перейти к новой переменной $t = \sin\alpha + \cos\alpha$. Так как угол α — острый, то $t > 0$ При этом $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{t^2 - 1}{2}$, $|t| \le \sqrt{2}$ (см. п. 14.1.10 главы 14). Таким образом, новая переменная $0 < t \le \sqrt{2}$. Производя замену, получим $f(t) = \frac{t^2 - 1}{(t + 1)} = t - 1,\ t \ne -1$.

Функция $f(t) = t - 1$ — линейная функция, которая возрастает, поэтому критических точек на полуоткрытом промежутке $0 < t \le \sqrt{2}$ не имеет. Следовательно, наибольшее значение функции достигается на правом конце промежутка, т. е. при $t = \sqrt{2}$. Тогда получим, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$. Легко установить, что острый угол, являющийся решением данного уравнения, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. При этом $0 < f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 < 1.$

Ответ: Наибольшее отношение $\frac{r}{R}$ достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, при этом прямоугольный треугольник является равнобедренным.

15.6. Построение графиков функций

Можно рекомендовать следующую общую схему исследования функции и построения ее графика.

1. Найти область определения функции.

2. Проверить, не является ли функция четной или нечетной, а также, не является ли она периодической. В последнем случае рекомендуется определить ее основной период.

3. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат.

4. Найти производную функции и ее критические точки. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.

5. Установить поведение функции при больших по модулю значений аргумента, т. е. при $x \to \infty; x \to -\infty$.

6. Используя полученные результаты, построить график функции.

Задача 4. Исследовать функцию и построить ее график, если $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^{2.}$.

Решение.

1. Область определения $x \in (-\infty; \infty)$.

2. Функция общего вида.

3. Если $x = 0$, то $y = 0$. Если $y = 0$, то получим уравнение

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^{2.} = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{3} \\ x_3 = \frac{2 + 2\sqrt{10}}{3}. \end{array}\right.$$

4. Находим производную:

$$y' = x^3 - x^2 - 2x = x\left(x^2 - x - 2\right) = x(x+1)(x-2).$$

Из уравнения $y' = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-2) = 0$ находим критические точки $x = -1; x = 0; x = 2.$ Найденные критические точки разбивают числовую прямую на четыре интервала $(-\infty;-1); (-1;0); (0;2); (2;\infty)$.

С помощью метода интервалов устанавливаем, что $y' < 0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (0;2)$ и $y' > 0$ при $x \in (-1;0) \cup (2;\infty)$.

Следовательно, на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;2)$ функция убывает, а на интервалах $(-1;0)$ и $(2;\infty)$ — возрастает. С помощью достаточного условия экстремума функции устанавливаем, что точки $x = -1$ и $x = 2$ являются точками минимума функции, при этом $y(-1) = -\frac{5}{12}; y(2) = -\frac{8}{3}$, а точка $x = 0$ — точкой максимума, при этом $y(0) = 0$.

5. При $x \to \infty$ в заданной функции преобладает первое слагаемое $\frac{x^4}{4}$, и поэтому $y \to \infty$. При $x \to -\infty$ в заданной функции преобладают первые два положительных слагаемых, и поэтому также $y \to \infty$.

6. Используя полученную информацию (табл. 15.2), строим график функции (рис. 15.3).

Таблица 15.2

Результаты исследования функции

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
x	$\downarrow$	$y_{min}=-\frac{5}{12}$	$\uparrow$	$y_{max}=0$	$\downarrow$	$y_{max}=-\frac{8}{3}$	$\uparrow$
x	0	$\frac{2-2\sqrt{10}}{3}$	$\frac{2+2\sqrt{10}}{3}$				
y	0	0	0				

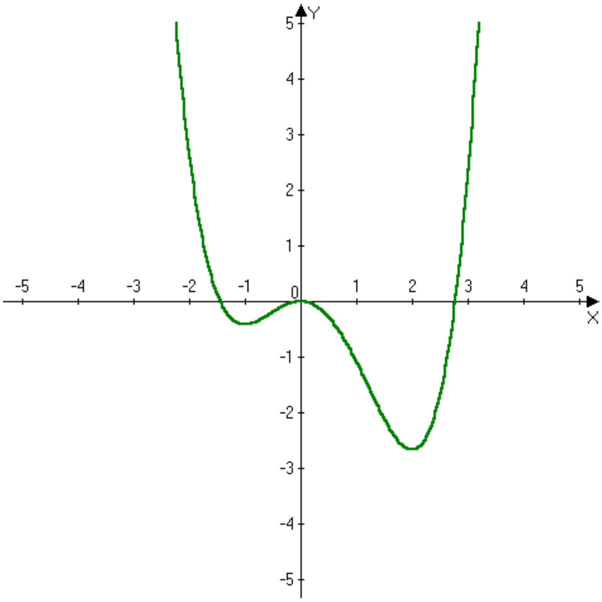


Рис. 15.3

График функции $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2$

15.7. Задачи, связанные с уравнением касательной к функции

При решении задач, связанных с уравнением касательной к функции, полезно знать уравнение прямых, проходящих через данную точку.

Как известно, уравнение прямой, не параллельной оси OY, имеет вид

$$y=kx+b, \tag{15.1}$$

где k — угловой коэффициент прямой (тангенс угла наклона этой прямой к оси OX), b — значение функции y в точке $x=0$. Пусть прямая проходит через некоторую точку с координатами (x_1, y_1). Тогда справедливо тождество

$$y_1=kx_1+b. \tag{15.2}$$

Вычитая из выражения (15.1) выражение (15.2), получим уравнение

$$y - y_1 = k(x - x_1) \Leftrightarrow y = y_1 + k(x - x_1), \qquad (15.3)$$

которое называется уравнением пучка прямых, проходящих через точку с координатами (x_1, y_1). Если эта точка — точка касания функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0), тогда $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $y_0 = f(x_0)$, а угловой коэффициент такой прямой равен $k = f'(x_0)$, и мы получим рассмотренное выше уравнение касательной к функции в данной точке:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (15.4)$$

Если же касательная проходит через данную точку с координатами (x_1, y_1), которая не совпадает с точкой касания (x_0, y_0), то из (15.3) следует, что уравнение касательной можно записать в виде

$$y_k = y_1 + f'(x_0)(x - x_1). \qquad (15.5)$$

Известно, что если две прямые с угловыми коэффициентами k_1и k_2 параллельны между собой, то их угловые коэффициенты равны, т. е. $k_1 = k_2$. Если же две прямые взаимно перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно (-1), т. е. $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Задача 5. Найти уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 7x + 3$, если эта касательная параллельна прямой $5x + y - 3 = 0$.

Решение. Прямая $5x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -5x + 3$ имеет угловой коэффициент, равный (-5).

Так как касательная параллельна этой прямой, то угловой коэффициент касательной также равен (-5).

Угловой коэффициент касательной определяется по формуле $f'(x_0) = 2x_0 - 7 = -5$. Из данного уравнения находим, что $x_0 = 1$. Тогда $f(x_0) = -3$, и уравнение искомой касательной имеет вид

$$y_k = -3 - 5(x - 1) \Leftrightarrow y_k = -5x + 2.$$

Ответ: $y_k = -5x + 2$.

Задача 6. Составить уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M(2;-5)$.

Решение.

1. Проверим, лежит ли данная точка на кривой.

Подставляя координаты точки в уравнение кривой, получим

$$-5 \neq 4 - 8 + 3 = -1.$$

Следовательно, данная точка не лежит на кривой.

2. Заметим, что $f'(x_0) = 2x_0 - 4$. Из уравнения (15.5) следует, что $y_k = -5 + f'(x_0)(x - 2) = -5 + (2x_0 - 4)(x - 2)$.

Из уравнения (15.4) следует, что $y_k = f(x_0) + (2x_0 - 4)(x - x_0)$.

Приравнивая эти выражения, получим уравнение относительно координаты x_0 точки касания $-5 + (2x_0 - 4)(x - 2) = f(x_0) + (2x_0 - 4)(x - x_0)$.

Так как $f(x_0)=x_0^2-4x_0+3$, то уравнение запишется в виде

$$-5+(2x_0-4)x-2(2x_0-4)=x_0^2-4x_0+3+(2x_0-4)x-x_0(2x_0-4).$$

После упрощений получим

$$-5-4x_0+8=x_0^2-4x_0+3-2x_0^2+4x_0 \Leftrightarrow x_0^2-4x_0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=4 \end{array}\right..$$

Тогда $f(x_0)=3$ при $x_0=0$ и $f(x_0)=3$ при $x_0=4$.

Запишем уравнения искомых касательных:

а) $y_k=f(x_0)+(2x_0-4)(x-x_0)=-4x+3$;

б) $y_k=f(x_0)+(2x_0-4)(x-x_0)=3+4(x-4)=4x-13$.

Ответ: $y_k=-4x+3; y_k=4x-13$.

Замечание. Мы могли также подставить координаты данной точки $M(2;-5)$ в уравнение касательной (15.4), считая, что $y_k=2$ при $x=-5$.

Задача 7. Составить уравнение общей касательной к параболам:

$$y=x^2+4x+8 \text{ и } y=x^2+8x+4.$$

Решение. Обозначим координаты точки касания первой параболы $y_1=f_1(x)=x^2+4x+8-(x_0,y_0)$, а координаты точки касания второй параболы $y_2=f_2(x)=x^2+8x+4-(x_1,y_1)$ (рис. 15.4).

Уравнение касательной, касающейся точки (x_0,y_0), имеет вид (15.4) $y_k=f_1(x_0)+(2x_0+4)(x-x_0)=x_0^2+4x_0+8+(2x_0+4)(x-x_0)$.

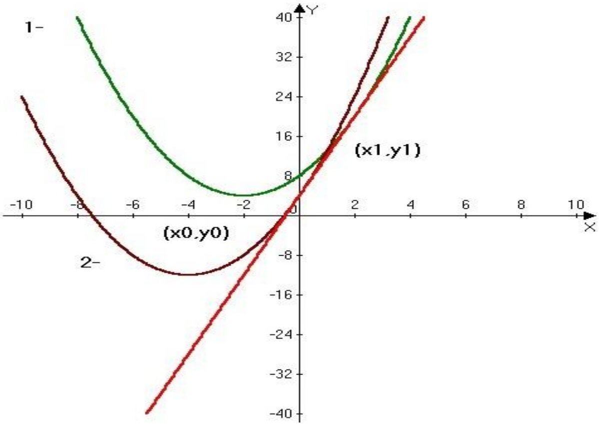


Рис. 15.4

К решению задачи 4

Так как касательная проходит также через точку (x_1,y_1), не совпадающую с (x_0,y_0), то ее уравнение также может быть записано в виде формулы (15.5) $y_k=y_1+(2x_0+4)(x-x_1)$.

Но (x_1,y_1) — точка касания второй параболы, следовательно, $y_1=f_1(x_1)$. Тогда $y_k=f_1(x_1)+(2x_0+4)(x-x_1)=x_1^2+8x_1+4+(2x_0+4)(x-x_1)$.

Приравнивая y_k из полученных уравнений, получим, что

$x_0^2 + 4x_0 + 8 + (2x_0 + 4)(x - x_0) = x_1^2 + 8x_1 + 4 + (2x_0 + 4)(x - x_1)$ или

$x_0^2 + 4x_0 + 8 + (2x_0 + 4)x - x_0(2x_0 + 4) = x_1^2 + 8x_1 + 4 + (2x_0 + 4)x - (2x_0 + 4)x_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2 + 4x_1 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x_0 - x_1\right)^2 + 4x_1 - 4 = 0.$

Так как искомая касательная является общей к двум параболам, то угловой коэффициент k касательной равен $k = f^{'}(x_0) = 2x_0 + 4$, и этот же угловой коэффициент равен $k = f^{'}(x_1) = 2x_1 + 8$.

Следовательно, $2x_0 + 4 = 2x_1 + 8 \Leftrightarrow x_0 = x_1 + 2$.

В результате получим систему

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = 2 \\ \left(x_0 - x_1\right)^2 + 4x_1 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - x_1 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение касательной

$y_k = f_1(x_1) + (2x_0 + 4)(x - x_1) = x_1^2 + 8x_1 + 4 + (2x_0 + 4)(x - x_1)$ значения $x_1 = 0; x_0 = 2$, получим, что $y_k = 8x + 4$.

Ответ: $y_k = 8x + 4$.

ГЛАВА 16
ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

16.1. Общие положения

При рассмотрении произвольного алгебраического выражения $f(x,y,a,b)$ его аргументы можно разделить на две группы. Одну из них (например, a и b) назовем параметрами, а другую, x и y, как и прежде, — аргументами. В процессе преобразования выражения $f(x,y,a,b)$ параметры a и b мысленно фиксируются (т. е. считаются известными величинами), тогда как аргументы x и y предполагаются изменяющимися.

При этом могут возникнуть следующие ситуации:

а) при значениях $a = a_0$ и $b = b_0$ выражение $f(x,y,a,b)$ не имеет смысла ни при каких x и y. В этом случае система значений параметров (a_0, b_0) называется *недопустимой системой значений параметров* a и b для выражения $f(x,y,a,b)$;

б) при значениях $a = a_0$ и $b = b_0$ выражение $f(x,y,a,b)$ имеет смысл при некоторых значениях x и y. В этом случае система значений параметров (a_0, b_0) называется *допустимой системой значений параметров* a и b для выражения $f(x,y,a,b)$.

Например, для выражения $f(x,a,b) = x^3 + a + b$ допустимой является любая система значений параметров a и b $(a; b \in R)$; для выражения $f(x,a,b) = \dfrac{x^2}{1-a} + \sqrt{b}$ допустимыми значениями параметра являются $a \neq 1; b \geq 0$.

Задача 1. Определить допустимые значения параметра a и при каждом таком a найти область определения выражения $f(x,a) = \log_2(x-a) + \sqrt{a+1}$.

Решение.

Областью допустимых значений параметра a является множество $a \geq -1$. Область определения выражения определяется неравенством $x > a$.

Ответ: Для каждого допустимого значения параметра $a \geq -1$ областью определения выражения является множество $x > a$.

При нахождении множеств решений задач с параметрами полезно выделять *критические* (*контрольные*) значения параметра. Под критическими значениями будем понимать такие значения параметра, при переходе через которые происходит изменение зависимости решения от параметра (например, меняется число решений, форма записи решения в зависимости от параметра и т. д.).

Рассмотрим уравнение вида

$$f(x,a) = g(x,a), \tag{16.1}$$

содержащее параметр a.

Решить уравнение (16.1) с параметром a — значит при каждом допустимом значении a указать множество всех его решений.

Задача 2. Для каждого допустимого значения параметра a решить уравнение $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение.

В данном уравнении допустимыми являются любые значения параметра $a \in R$.

При $a = 0$ уравнение принимает вид $2x + 1 = 0$, т. е. становится линейным и имеет решение $x = -\frac{1}{2}$.

При $a \neq 0$ уравнение является квадратным и имеет решения лишь при тех значениях параметра a, при которых его дискриминант неотрицателен, т. е.

$$D = 4 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1.$$

При этом, если $a \leq 1$, то уравнение имеет два решения $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$ и $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}$.

Таким образом, значения параметра $a = 0$ и $a = 1$ являются критическими значениями.

Множество решений удобно интерпретировать с помощью диаграммы, на которую нанесены все критические значения параметра a и указаны все решения, отвечающие как критическим значениям параметра, так и интервалам между критическими значениями (рис. 16.1).

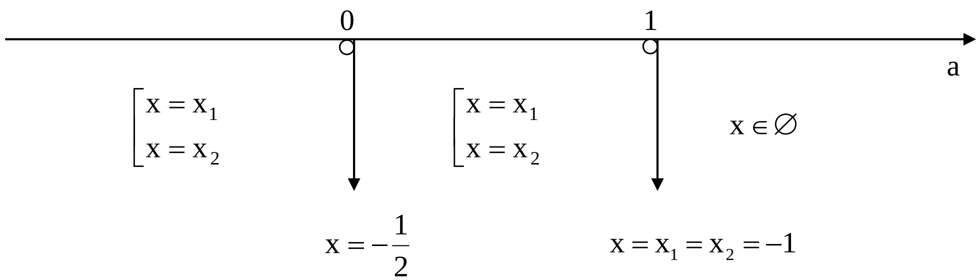


Рис. 16.1

Диаграмма решений задачи 2

Ответ: Если $a > 1$, то решений нет;

если $a = 0$, то $x = -\frac{1}{2}$, если $a = 1$, то $x = -1$;

если $a < 1$, $a \neq 0$ то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

16.2. Линейные уравнения с параметрами

Рассмотрим уравнение

$$ax + b = 0,$$

где x — неизвестная величина, a и b — параметры уравнения. Если $a \neq 0$, то уравнение при любом b имеет единственное решение $x = -\frac{b}{a}$. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение имеет бесчисленное множество решений $x \in R$. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Задача 3. Для каждого допустимого значения параметра a решить уравнение $a^2x = a(x+2) - 2$.

Решение.

В данном уравнении допустимыми являются любые значения параметра $a \in R$. Уравнение равносильно такому уравнению:

$$\left(a^2 - a\right)x = 2a - 2 \Leftrightarrow a(a-1)x = 2(a-1).$$

Отсюда следует, что критическими значениями параметра являются $a = 0$ и $a = 1$:

а) если $a = 0$, то уравнение равносильно уравнению $0 \cdot x = -2 \Rightarrow x \in \varnothing$;

б) если $a = 1$, то уравнение равносильно уравнению $0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in R$;

в) если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{2}{a}$.

Строим диаграмму, соответствующую данному уравнению (рис. 16.2).

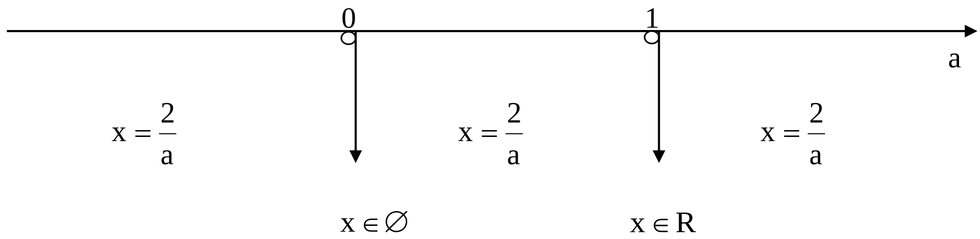


Рис. 16.2

Диаграмма решений задачи 3

Ответ: Если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$, то $x = \frac{2}{a}$;

если $a = 0$, то $x \in \varnothing$, если $a = 1$, то $x \in R$.

16.3. Квадратичные уравнения с параметрами

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x — неизвестная величина; a, b, c — параметры (коэффициенты уравнения).

К критическим значениям параметра a следует отнести значение $a = 0$. При указанном значении параметра уравнение принимает вид

$$bx + c = 0.$$

Полученное уравнение является линейным и метод его решения рассмотрен в п. 16.2.

При $a \neq 0$ другие критические значения параметров a, b, c определяются дискриминантом $D = b^2 - 4ac$ уравнения.

Известно, что при:

$D < 0$ квадратное уравнение корней не имеет;

$D = 0$ уравнение имеет два совпадающих корня $x_1 = x_2 = x = -\dfrac{b}{2a}$;

$D > 0$ уравнение имеет два различных корня $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

Поэтому при $a \neq 0$ к критическим значениям следует отнести также те значения параметров, при которых $D = b^2 - 4ac = 0$.

Задача 4. Для каждого допустимого значения параметра a решить уравнение

$$(a+1)x^2 + (3a^2 + 3a - 2)x - 6a = 0.$$

Решение.

В данной задаче допустимыми являются любые значения параметра $a \in R$.

Рассмотрим вначале случай, когда $a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$. При этом исходное уравнение становится линейным (т. е. $a = -1$ — критическое значение параметра): $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Пусть теперь $a \neq -1$. Тогда данное уравнение является квадратным. Найдем его дискриминант:

$$D = \left(3a^2 + 3a - 2\right)^2 + 24a\left(a+1\right) = 9a^4 + 18a^3 + 21a^2 + 12a + 4 =$$

$$= \left(9a^4 + 18a^3 + 9a^2\right) + \left(12a^2 + 12a\right) + 4 = \left(3a^2 + 3a\right)^2 + 2 \cdot \left(3a^2 + 3a\right) \cdot 2 + 4 = \left(3a^2 + 3a + 2\right)^2.$$

Поскольку при всех рассматриваемых значениях параметра дискриминант принимает положительные значения, то исходное уравнение при $a \neq -1$ имеет два различных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-(3a^2 + 3a - 2) \pm (3a^2 + 3a + 2)}{2(a+1)} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{a+1} \\ -3a. \end{array}\right.$$

Строим диаграмму, соответствующую данному уравнению (рис. 16.3).

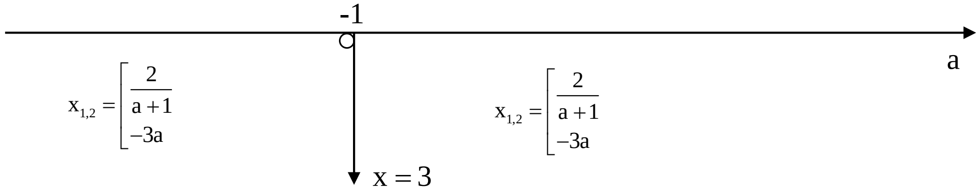


Рис. 16.3

Диаграмма решений задачи 4

Ответ: Если $a = -1$, то $x = 3$;

если $a \neq -1$, то $x_1 = \dfrac{2}{a+1}; x_2 = -3a$.

16.4. Уравнения с параметрами, содержащие модули

Рассмотрим уравнения вида

$$|f(x,a)| = g(x,a), \tag{16.2}$$

где x — неизвестная величина; a — параметр уравнения. Из теоремы 2.8 главы 2 вытекает следующий результат:

Теорема 16.1 *При любом допустимом значении параметра a уравнение (16.2) равносильно системе*

$$\begin{cases} g(x,a) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x,a) = g(x,a) \\ f(x,a) = -g(x,a) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x,a) \ge 0 \\ f(x,a) = g(x,a) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x,a) \ge 0 \\ f(x,a) = -g(x,a). \end{cases} \end{array}\right.$$

Задача 5. Для каждого допустимого значения параметра a решить уравнение $x - |ax - 2| = 3$ и указать все значения параметра a, при которых:

а) уравнение не имеет решений;

б) уравнение имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Допустимыми значениями параметра являются любые значения $a \in R$. Согласно теореме 16.1 имеем

$$x - |ax - 2| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ ax - 2 = -x + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ ax - 2 = x - 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3 \\ (a+1)x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 3 \\ (a-1)x = -1. \end{cases} \end{array}\right. \tag{16.3}$$

При $a = -1$ уравнение первой системы (16.3) приобретает вид $0 \cdot x = 5$ и, значит, не имеет решений. Если $a \ne -1$, то решением этого уравнения является $x = \dfrac{5}{a+1}$. Подставляя найденное значение x в неравенство $x \ge 3$, будем иметь

$$\frac{5}{a+1} \ge 3 \Leftrightarrow \frac{5}{a+1} - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3a-2}{a+1} \le 0 \Leftrightarrow -1 < a \le \frac{2}{3}.$$

Итак, если $a \in \left(-1; \dfrac{2}{3}\right]$, то $x = \dfrac{5}{a+1}$;

если $a \in (-\infty; -1] \cup \left(\dfrac{2}{3}; \infty\right)$, то $x \in \varnothing$.

Приступим теперь к решению второй системы (16.3). При $a = 1$ ее уравнение приобретает вид $0 \cdot x = -1$ и, значит, не имеет решений. Если $a \ne 1$, то решением данного уравнения второй системы является $x = \dfrac{1}{1-a}$. Подставляя найденное значение x в неравенство $x \ge 3$, будем иметь

$$\frac{1}{1-a} \ge 3 \Leftrightarrow \frac{1}{1-a} - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3a-2}{a-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le a < 1.$$

Итак, для второй системы (16.2) получаем следующий результат:

если $a \in \left[\dfrac{2}{3};1\right)$, то $x = \dfrac{1}{1-a}$;

если $a \in \left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right) \cup [1;\infty)$, то $x \in \varnothing$.

Объединяя результаты, полученные для первой и второй систем, строим диаграмму для данного уравнения (рис. 16.4).

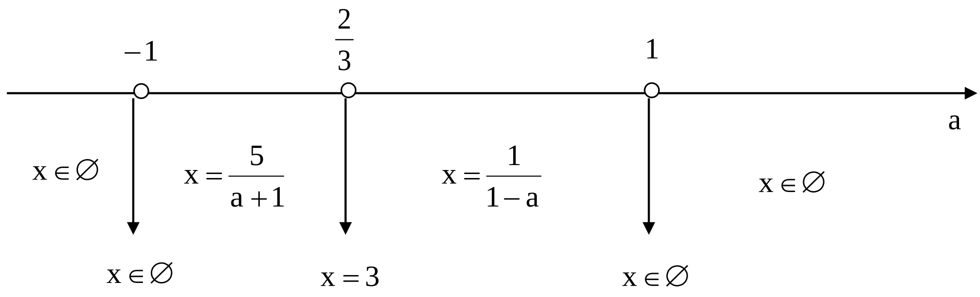


Рис. 16.4

Диаграмма решений задачи 5

Ответ: Если $a \in (-\infty;-1] \cup [1;\infty)$, то $x \in \varnothing$;

если $a \in \left(-1;\dfrac{2}{3}\right)$, то $x = \dfrac{5}{a+1}$;

если $a = \dfrac{2}{3}$, то $x = 3$;

если $a \in \left(\dfrac{2}{3};1\right)$, то $x = \dfrac{1}{1-a}$.

Из диаграммы следует, что при $a \in (-\infty;-1] \cup [1;\infty)$ решений нет.

При $a(-1;1)$ существует хотя бы одно решение.

16.5. Линейные неравенства с параметрами

Рассмотрим неравенства вида

$$ax + b > 0,\ ax + b < 0,\ ax + b \geq 0,\ ax + b \leq 0,$$

где x — неизвестная величина, a и b — параметры неравенства.

Рассмотрим решение второго из перечисленных неравенств; остальные неравенства решаются аналогично.

$$ax + b < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{b}{a}, \text{если } a > 0, \\ x > -\dfrac{b}{a}, \text{ если } a < 0, \\ x \in R, \text{ если } a = 0, b < 0, \\ x \in \varnothing, \text{ если } a = 0, b \geq 0. \end{array}\right.$$

Задача 6. Для каждого допустимого значения параметра а решить неравенство $ax + x + 2a < 1$.

Решение.

Очевидно, что здесь $a \in R$. Записав данное неравенство в виде $(a+1)x < 1 - 2a$, имеем:

а) если $a = -1$, то данное неравенство запишется в виде $0 \cdot x < 3$ и его решениями является вся числовая ось, т. е. $x \in R$;

б) если $a > -1$, то $x < \dfrac{1-2a}{1+a}$;

в) если $a < -1$, то $x > \dfrac{1-2a}{1+a}$.

Диаграмма, соответствующая данному неравенству, приведена на рисунке 16.5.

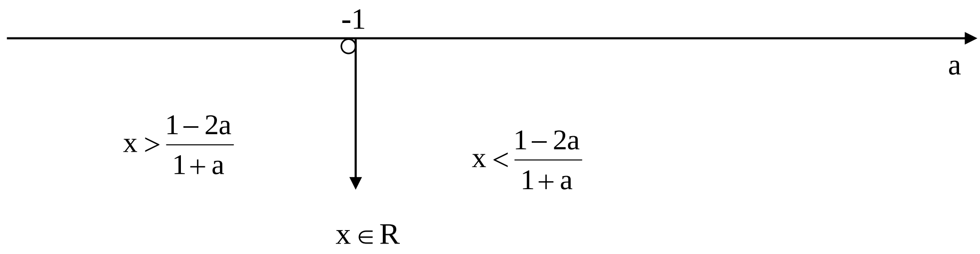


Рис. 16.5

Диаграмма решений задачи 6

Ответ: Если $a = -1$, то $x \in R$; если $a < -1$, то $x > \dfrac{1-2a}{1+a}$; если $a > -1$, то $x < \dfrac{1-2a}{1+a}$.

16.6. Неравенства с параметрами, решаемые методом интервалов

При решении неравенств с параметрами методом интервалов важным является взаимное расположение корней многочленов, входящих в неравенство, которое может изменяться в зависимости от значений параметра.

Задача 7. Для каждого допустимого значения параметра а решить неравенство $(a-2)x^2 - 4x > 0$.

Решение.

Здесь допустимым значением параметра является любое значение $a \in R$.

Если $a = 2$, то данное неравенство запишется в виде $-4x > 0$ и множеством его решений является бесконечный промежуток $x < 0$.

Если $a \neq 2$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$(a-2)x\left(x-\frac{4}{a-2}\right)>0. \tag{16.4}$$

Для того чтобы применить метод интервалов, необходимо иметь информацию о знаке разности $a-2$ и о взаимном расположении корней $x_1=0$ и $x_2=\frac{4}{a-2}$ квадратного трехчлена в выражении (16.4). Рассмотрим два возможных случая знака разности $a-2$:

а) $a-2>0$ — неравенство (16.4) равносильно неравенству

$$x\left(x-\frac{4}{a-2}\right)>0. \tag{16.5}$$

Так как здесь $0<\frac{4}{a-2}$ (т. е. $x_1<x_2$), то множеством решений неравенства (16.5) является объединение двух бесконечных промежутков (рис. 16.6).

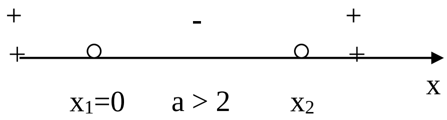


Рис. 16.6

К решению неравенства (16.5) при $a-2>0$

$(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$, т. е. $(-\infty;0)\cup\left(\frac{4}{a-2};\infty\right)$;

б) $a-2<0$ — неравенство (16.4) равносильно неравенству

$$x\left(x-\frac{4}{a-2}\right)<0. \tag{16.6}$$

Так как здесь $\frac{4}{a-2}<0$ (т. е. $x_2<x_1$), то множеством решений неравенства (16.6) является промежуток $(x_2;x_1)$, т. е. $\left(\frac{4}{a-2};0\right)$ (рис. 16.7).

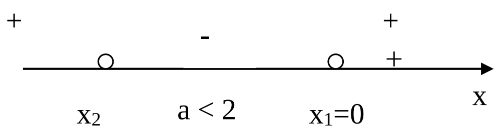


Рис. 16.7

К решению неравенства (16.5) при а – 2 < 0

Ответ: Если $a > 2$, то $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{a-2}; \infty \right)$;

если $a = 2$, то $x \in (-\infty; 0)$;

если $a < 2$, то $x \in \left(\frac{4}{a-2}; 0 \right)$.

Задача 8. Для каждого допустимого значения параметра а решить неравенство $ax^2 - (4a^2 + 1)x + 4a \le 0$.

Решение.

Здесь допустимым значением параметра является любое значение $a \in R$.

Если $a = 0$, то неравенство имеет вид $-x \le 0$, решением которого является множество $x \in [0; \infty)$.

Если $a \ne 0$, то исходное неравенство после разложения на множители можно записать в виде

$$ax^2 - (4a^2 + 1)x + 4a = a(x - 4a)\left(x - \frac{1}{a} \right) \le 0. \qquad (16.7)$$

Для решения полученного неравенства методом интервалов необходимо определить взаимное расположение корней $x_1 = 4a$ и $x_2 = \frac{1}{a}$ в зависимости от параметра а.

Решая неравенство $x_1 \le x_2$ или $4a \le \frac{1}{a}$, получим, что

$$4a - \frac{1}{a} = \frac{4a^2 - 1}{a} \le 0 \iff \begin{cases} a(2a-1)(2a+1) \le 0 \\ a \ne 0 \end{cases} \iff a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left(0; \frac{1}{2} \right].$$

Тогда при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right)$ неравенство (16.7) имеет вид

$$(x - 4a)\left(x - \frac{1}{a} \right) \ge 0, \qquad (16.8)$$

($x_1 < x_2$) (рис. 16.8).

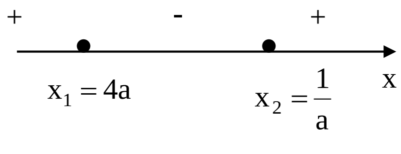


Рис. 16.8

К решению неравенства (16.8) при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right)$

Решением данного неравенства будет объединение двух промежутков $x \in (-\infty; 4a] \cup \left[\frac{1}{a}; \infty \right)$.

При $a=-\frac{1}{2}$ неравенство (16.7) принимает вид $-\frac{1}{2}(x+2)^2\le 0$, решение которого — множество $x\in R$.

При $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$ $x_1>x_2$ (рис. 16.9) и неравенство (16.8) имеет решение в виде объединения двух промежутков $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a}\right]\cup[4a;\infty)$.

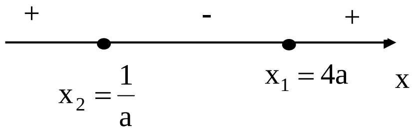


Рис. 16.9

К решению неравенства (16.8) при $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$

При $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ $x_1<x_2$ и неравенство (16.7) запишется в виде

$$(x-4a)\left(x-\frac{1}{a}\right)\le 0. \qquad (16.9)$$

Решение данного неравенства (рис. 16.10) имеет вид: $x\in\left[4a;\frac{1}{a}\right]$.

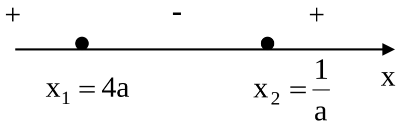


Рис. 16.10

К решению неравенства (16.9) при $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

При $a=\frac{1}{2}$ неравенство (16.7) принимает вид $\frac{1}{2}(x-2)^2\le 0$, решение которого — $x=2$.

При $a\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$ снова $x_1>x_2$ и неравенство (16.9) имеет решение (рис. 16.11).

$x\in\left[\frac{1}{a};4a\right]$

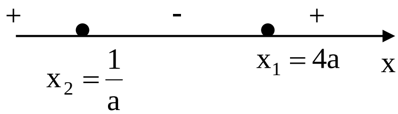


Рис. 16.11

К решению неравенства (16.9) при $a\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$

Ответ: При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ $x \in (-\infty; 4a] \cup \left[\frac{1}{a}; \infty\right)$;

при $a = -\frac{1}{2}$ $x \in R$;

при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right] \cup [4a; \infty)$;

при $a = 0$ $x \in [0; \infty)$;

при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ $x \in \left[4a; \frac{1}{a}\right]$;

при $a = \frac{1}{2}$ $x = 2$;

при $a \in \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ $x \in \left[\frac{1}{a}; 4a\right]$.

16.7. Задачи с ограничениями на множества решений

В предыдущих разделах этой главы решались задачи с параметрами, в которых для каждого допустимого значения параметра требовалось найти множество решений данной задачи.

В этом разделе остановимся на другом типе задач с параметрами: найти те значения параметра, при которых решения задачи удовлетворяют тому или иному дополнительному условию (например, условию единственности решения, условию принадлежности решений задачи какому-либо подмножеству и др.).

Задачи указанного типа носят название задач с ограничениями на множества решений. В каждой конкретной задаче с ограничениями необходимо вырабатывать свою стратегию решения задачи.

Задача 9. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg(ax) = 2\lg(x+1)$ имеет единственное решение.

Решение.

Допустимыми значениями параметра являются все значения $a \neq 0$.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1>0 \\ ax>0 \\ ax=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ ax>0 \\ x^2-(a-2)x+1=0, \end{cases}$$

которая в свою очередь равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} a>0 \\ x>0 \\ x^2-(a-2)x+1=0, \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} a<0 \\ -1<x<0 \\ x^2-(a-2)x+1=0. \end{cases}$$

(а) При $a > 0$ первая система имеет единственное решение, если:

1) уравнение имеет единственный корень (два равных между собой корня) и этот корень является положительным;

2) уравнение имеет два разных корня и эти корни имеют разные знаки;

3) уравнение имеет два корня, один из которых равен нулю, а другой положителен.

Случай 1 может иметь место лишь при таких значениях параметра а, при которых выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D = (a-2)^2 - 4 = 0 \\ x = \dfrac{a-2}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \end{array}\right. \\ \dfrac{a-2}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4.$$

Положим $f(x) = x^2 - (a-2)x + 1$.

Случай 2 может выполняться лишь при тех значениях параметра а > 0, при которых $f(0) < 0$ (раздел 4.5 главы 4). Так как $f(0) = 1 > 0$, то этот случай не реализуется ни при каком а.

Случай 3 тоже не реализуется, так как при любом значении а корни уравнения системы отличны от нуля (произведение корней равно 1).

(б) При $a < 0$ данная задача равносильна второй системе. Определим те значения параметра а, при которых только один корень квадратного уравнения лежит в интервале $(-1;0)$. Задача такого типа рассматривалась в п. 4.5 главы 4. Для решения задачи необходимо решить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(-1) \cdot f(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 1 + (a-2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < 0.$$

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$.

16.8. Методы поиска необходимых условий в задачах с ограничениями

При решении задач с ограничениями на множества решений часто используется следующий метод.

Сначала, решая некоторую более простую вспомогательную задачу, выделяют такое множество значений параметров Ω_1, принадлежность к которому является необходимым условием справедливости требуемого результата.

Затем, проведя дополнительные рассуждения, из множества Ω_1 выделяют подмножество Ω_2 тех значений параметров, которые являются искомыми решениями поставленной задачи (иными словами, принадлежность параметров к множеству Ω_2 является достаточным условием справедливости требуемого результата).

Задачи, решаемые таким методом, называют задачами с поиском необходимых условий.

Задача 10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений уравнения

$$\left(a^3 - a + 1\right)\cos^2 x - \frac{a^4 + a^2}{2}\sin^2 x = \cos 2x$$

является вся числовая ось $(-\infty;\infty)$.

Решение.

Так как по условию решение данного уравнения — любое число, то решением необходимо является и $x = 0$. Подставив значение $x = 0$ в данное уравнение, получим

$$a^3 - a + 1 = 1 \Leftrightarrow a\left(a^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \\ a = 1. \end{array}\right.$$

Итак, в данной задаче $\Omega_1 = \{-1; 0; 1\}$, и принадлежность параметра a к множеству Ω_1 является необходимым условием справедливости требования поставленной задачи.

Однако найденные значения параметра a требуют проверки, так как если $a \in \Omega_1$, то можно лишь утверждать, что число $x = 0$ является решением данного уравнения, а о других значениях $x \in (-\infty;\infty)$ пока ничего неизвестно.

Подставляя найденные значения параметра $a \in \Omega_1$ в исходное уравнение, получим:

а) $a = -1: \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 2x$ — это равенство справедливо при любом $x \in (-\infty;\infty)$;

б) $a = 1: \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 2x$ — это равенство справедливо при любом $x \in (-\infty;\infty)$;

в) $a = 0$: $\cos^2 x = \cos 2x$ — вся числовая ось не является множеством решения этого уравнения, так как ему не удовлетворяет, например, значение $x = \frac{\pi}{2}$.

Итак, множество искомых значений параметра — это множество $\Omega_2 = \{-1; 1\}$.

Ответ: $a \in \{-1; 1\}$.

В задачах такого типа возникает вопрос: какие значения переменной следует брать? Ответ: значения должны быть удобными, т. е. такими, которые не приводят к громоздким вычислениям и при которых множество значений параметра Ω_1 содержит, по возможности, как можно меньше элементов.

Иногда в задачах с ограничениями возможно использование *симметрии* алгебраических выражений.

Задача 11. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x^2 - a|x|} = a^3 + 4a^2 - 5a$$

имеет единственное решение?

Решение.

Так как $x^2 = |x|^2$, то данное уравнение можно записать в равносильном виде:

$$\sqrt{|x|^2 - a|x|} - a^3 - 4a^2 + 5a = 0. \qquad (16.10)$$

Поскольку $|-x| = |x|$, то при любом a левая часть уравнения (16.10) является четной функцией. Отсюда следует, что *единственное решение данное уравнение может иметь место только при значении* $x_0 = -x_0 = 0$.

Подставляя в исходное уравнение $x = 0$, получаем

$$a^3 + 4a^2 - 5a = 0 \Leftrightarrow a\left(a^2 + 4a - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -5 \\ a = 1. \end{array}\right.$$

Таким образом, найдено множество $\Omega_1 = \{-5; 0; 1\}$ значений параметра a, при которых уравнение (16.10) может иметь единственное решение ($x = 0$).

Осталось выяснить, действительно ли при любом $a \in \Omega_1$ исходное уравнение имеет единственное решение.

а) если $a = -5$, то данное уравнение принимает вид $\sqrt{|x|^2 + 5|x|} = 0 \Leftrightarrow |x|\left(|x| + 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 0 \\ |x| + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x| = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$, следовательно, при $a = -5$ исходное уравнение действительно имеет только одно решение;

б) если $a = 0$, то данное уравнение принимает вид $\sqrt{|x|^2} = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, следовательно, при $a = 0$ исходное уравнение тоже имеет только одно решение;

в) если $a = 1$, то данное уравнение принимает вид $\sqrt{|x|^2 - |x|} = 0 \Leftrightarrow |x|\left(|x| - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 0 \\ |x| - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x| = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1, \end{array}\right.$ следовательно, при $a = 1$ исходное уравнение имеет более одного решения.

Ответ: $a \in \{-5; 0\}$.

16.9. Геометрические методы решения задач с параметрами

При решении задач с параметрами можно использовать геометрические соображения. В п. 4.5 главы 4 были рассмотрены некоторые задачи с параметрами, решаемые с помощью построения графиков. Определим алгоритм решения задач с параметрами с применением геометрических методов в более общем виде.

А. Построение графического образа в системе координат xOa.

Рассмотрим некоторую задачу, содержащую одну переменную x и параметр a. Будем рассматривать параметр a как равноправную (с аргументом x) переменную и рассмотрим прямоугольную систему координат xOa. Пусть задача определяется одним или несколькими аналитическими выражениями аргументов x, a (например, $F(x,a)$ или $F(x,a)$и $G(x,a)$ и т. д.). Предположим, что графики уравнений $F(x,a)=0$, $G(x,a)=0$ в системе координат xOa строятся несложно. Указанные графики определяют графический образ данной задачи.

Процесс решения выглядит так:

– строится графический образ задачи;

– пересекая полученный графический образ прямыми $a = \text{const}$, получаем требуемую информацию (например, число корней уравнения в зависимости от значений параметра, свойства решений уравнений, неравенств или их систем и др.).

Задача 12. Определить все значения параметра a, при которых уравнение $|x+1|+a-2=0$ имеет хотя бы один положительный корень.

Решение.

Преобразуем уравнение к виду

$$a = 2 - |x+1| = \begin{cases} 3 + x, \text{если } x < -1 \\ 1 - x, \text{если } x \geq -1 \end{cases}$$

и строим график полученной функции $a = a(x)$ (рис. 16.12).

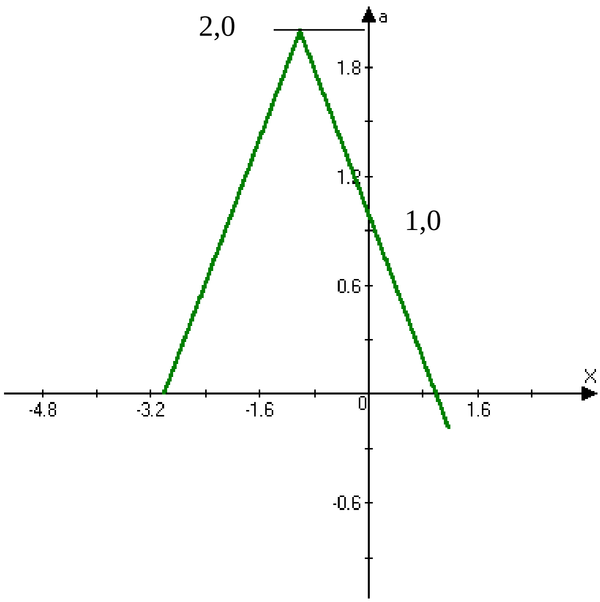


Рис. 16.12

График функции $a = a(x)$

Ясно, что данному уравнению удовлетворяют координаты (x,a) всех точек полученного «уголка» (и только они). Поэтому при каждом фиксированном значении a_0 параметра a решениями уравнения являются абсциссы точек пересечения построенного графика с горизонтальной прямой $a = a_0$, соответствующей этому значению параметра.

В зависимости от значений параметра указанная прямая и график либо не имеют точек пересечения (при $a > 2$), либо пересекаются в одной точке (при a = 2), либо пересекаются в двух точках (при $a < 2$). Одна из точек пересечения будет иметь положительную абсциссу тогда и только тогда, когда $a < 1$. Это и есть искомое множество значений параметра.

Ответ: $a \in (-\infty; 1)$.

Б. Построение графического образа в системе координат xOy.

В отличие от графического метода в плоскости xOa, в этом методе параметру а отводится роль «неравноправная» с переменной х.

Рассмотрим уравнение вида

$$f(x,a) = g(x,a)$$

или неравенство вида

$$f(x,a) > g(x,a).$$

Пусть ставится задача о нахождении решений такого уравнения или неравенства (при всех допустимых значениях параметра) или задача об исследовании свойств множества решений такого уравнения (неравенства).

Для решения сформулированной задачи в координатной плоскости xOy строим графики функций $y = f(x,a)$ и $y = g(x,a)$, задающих на плоскости (в зависимости от параметра а) семейства кривых. Затем, анализируя эти семейства кривых, получаем необходимую информацию о решениях задачи.

Для реализации указанного метода следует по возможности «собрать» параметр в одной части (левой или правой), т. е. привести данное уравнение (неравенство) к виду $f_1(x,a) = g_1(x)$ (соответственно $f_1(x,a) > g_1(x)$). Делается это для того, чтобы при изменении параметра «двигался» только график функции $y = f_1(x,a)$, а график $y = g_1(x)$ оставался неподвижным.

Задача 13. Найти все значения параметра а, при каждом из которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение.

Представим исходное неравенство в виде $|x - a| < 3 - x^2$. Тогда можно построить два графика $y = f_1(x,a) = |x - a|$ и $y = g_1(x) = 3 - x^2$.

Функция $y = f_1(x,a) = |x - a|$ для каждого фиксированного значения а задает «уголок» из двух пересекающихся в точке а прямых, а функция $y = g_1(x) = 3 - x^2$ задает неподвижную параболу (рис. 16.13).

При уменьшении параметра а функция $y = |x - a|$ — «уголок» будет перемещаться влево, и при некотором значении параметра а левая ветка этой функции коснется параболы. Начиная с этого значения параметра а, будет выполняться неравенство $|x - a| < 3 - x^2$ (прямая расположена ниже параболы). Для того чтобы у данного неравенства имелось хотя бы одно отрицательное решение, значение параметра должно быть меньше, чем 3 (ветка 1 на рис. 16.13). Условие задачи будет выполняться до тех пор, пока правая ветка «уголка» не коснется параболы (ветка 2 на рис. 16.13). Определим значение параметра, при котором произойдет данное касание.

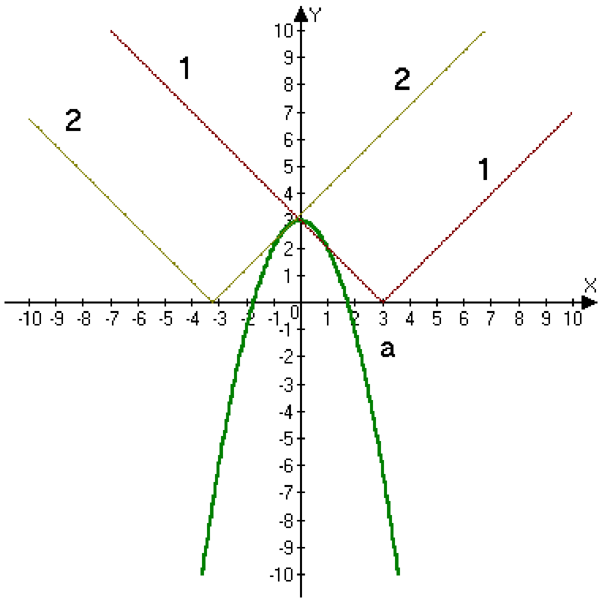


Рис. 16.13

Графики к решению задачи 13

Теперь задача формулируется следующим образом:

Найти значение параметра а, при котором график функции $y = x - a$ касается графика функции $y = 3 - x^2$.

Производная функции $y = 3 - x^2$ равна $y' = -2x$. Производная функции $y = x - a$ равна $y' = 1$. Очевидно, что в точке касания (x_0, y_0) выполняется равенство $-2x_0 = 1$ или $x_0 = -\frac{1}{2}$. Тогда $y_0 = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$.

Таким образом получаем, что $y_0 = x_0 - a \Leftrightarrow \frac{11}{4} = -\frac{1}{2} - a \Leftrightarrow a = -\frac{13}{4} = -3{,}25$.

Ответ: $a \in (-3{,}25; 3)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотов, А. А.* Математика. Теория и задачи. Книга 1. Книга 2 / А. А. Болотов, В. И. Прохоренко, В. Ф. Сафонов. — М. : МЭИ, 1998.

2. *Литвиненко, В. Н.* Практикум по элементарной математике / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. — М. : Просвещение, 1991.

3. *Спокойный, Ю. Г.* Тригонометрия. Руководство по решению задач. — М. : Наука и техника, 1998.

4. *Потапов, М. К.* Алгебра и начала анализа / М. К. Потапов, В. В. Александров, П. И. Пасиченко. — М. : Федеративная Книготорговая Компания, 1998.

5. *Потапов, М. К.* Математика. Примеры решения задач, теория / М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко. — М. : АСТ-ЛТД, 1998.

6. *Моденов, В. П.* Грани математики: координатно-параметрический метод. — М. : Издательский отдел УНЦ ДО МГУ, 1999.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аркадий Михайлович РАЙЦИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Зав. редакцией
физико-математической литературы *О. Е. Гайнутдинова*
Ответственный редактор *Е. А. Дмитриева*
Корректор *Н. Ю. Наумкина*
Выпускающий *В. А. Иутин*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028 от 14.04.2016 г.,
выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 28.09.23
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 1/16.
Печать офсетная/цифровая. Усл. п. л. 19,83. Тираж 30 экз.

Заказ № 1145-23.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета в АО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.